



基于Rayleigh-Ritz法的含 T型环肋及舱壁圆柱壳自振特性研究

张帅 纪仁超 朱杰 李佩 周福昌

Rayleigh-Ritz method for free vibration characteristics of cylindrical shell with T-sectione rings and bulkheads

ZHANG Shuai, JI Renchao, ZHU Jie, LI Pei, ZHOU Fuchang

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.19693/j.issn.1673-3185.03951>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于幂级数法的环肋圆锥壳振动特性分析

Vibration characteristics analysis of ring-stiffened conical shells based on power series method

中国舰船研究. 2023, 18(2): 140-148 <https://doi.org/10.19693/j.issn.1673-3185.02442>

肋骨许用应力对环肋圆柱壳结构设计的影响

Influence of allowable stress on structural design of ring-stiffened cylindrical shells

中国舰船研究. 2022, 17(1): 126-131 <https://doi.org/10.19693/j.issn.1673-3185.02239>

环形加筋圆柱壳的焊接残余应力及振动特性研究

Investigation on welding residual stress and vibration characteristics of ring-stiffened cylindrical shell

中国舰船研究. 2023, 18(6): 208-215 <https://doi.org/10.19693/j.issn.1673-3185.03081>

水下环肋圆锥壳临界压力-频率特性分析

Critical pressure-frequency characteristics analysis for ring-stiffened submerged conical shells

中国舰船研究. 2019, 14(2): 77-82 <https://doi.org/10.19693/j.issn.1673-3185.01252>

基于实测几何缺陷的圆柱壳外压承载能力分析

Analysis on external pressure bearing capacity of cylindrical shell based on measured geometric defects

中国舰船研究. 2019, 14(4): 40-46 <https://doi.org/10.19693/j.issn.1673-3185.01355>

水下非均匀环肋圆柱壳多学科设计优化

Multidisciplinary design optimization of non-uniform stiffened cylindrical shells

中国舰船研究. 2021, 16(4): 63-69 <https://doi.org/10.19693/j.issn.1673-3185.02111>



扫码关注微信公众号, 获得更多资讯信息

引用格式: 张帅, 纪仁超, 朱杰, 等. 基于 Rayleigh-Ritz 法的含 T 型环肋及舱壁圆柱壳自振特性研究 [J]. 中国舰船研究. DOI: 10.19693/j.issn.1673-3185.03951.

ZHANG S, JI R C, ZHU J, et al. Rayleigh-Ritz method for free vibration characteristics of cylindrical shell with T-section rings and bulkheads[J]. Chinese Journal of Ship Research(in Chinese). DOI: 10.19693/j.issn.1673-3185.03951.

基于 Rayleigh-Ritz 法的含 T 型环肋及 舱壁圆柱壳自振特性研究



扫码阅读全文

张帅*, 纪仁超, 朱杰, 李佩, 周福昌

武汉第二船舶设计研究所, 湖北 武汉 430205

摘要: [目的] 旨在基于 Rayleigh-Ritz 法研究不同边界条件下含 T 型环肋及舱壁圆柱壳自由振动特性。[方法] 根据经典的 Love 壳体和薄板理论, 建立圆柱壳以及舱壁的数学物理模型。采用欧拉-伯努利梁理论, 将 T 型环肋视为离散单元, 通过其截面形心与壳体中面位移转角的关系, 经坐标转换后建立其数学模型。选取改进傅里叶级数作为位移惩罚函数, 统一圆柱壳-板-T 型环肋的位移表达形式。引入惩罚函数, 改变相应的弹簧刚度模拟舱壁柱壳间的连续条件及两端的边界条件。通过能量泛函得到耦合结构振动控制方程。[结果] 通过与数值方法结果的对比, 验证了所提方法的收敛性、准确性和可靠性。[结论] 研究表明, T 型环肋及舱壁数量、位置与耦合结构的自由振动特性关系密切, 本文工作可对舰船工程设计及应用提供参考。

关键词: 圆柱壳; 振动特性; T 型环肋; 舱壁; Rayleigh-Ritz 法; 改进傅里叶级数

中图分类号: U661.44

文献标志码: A

DOI: 10.19693/j.issn.1673-3185.03951

Rayleigh-Ritz method for free vibration characteristics of cylindrical shell with T-section rings and bulkheads

ZHANG Shuai*, JI Renchao, ZHU Jie, LI Pei, ZHOU Fuchang

Wuhan Second Ship Design and Research Institute, Wuhan 430205, China

Abstract: [Objectives] This paper seeks to study the free vibration characteristics of a cylindrical shell with T-shape ring stiffeners and bulkheads under different boundary conditions based on the Rayleigh-Ritz method. [Methods] The classical Kirchhoff-Love shell theory and thin plate theory are used to establish a mathematical and physical model of the cylindrical shell and bulkheads. Using the Euler-Bernoulli beam theory, the T-shape ring stiffeners is regarded as a discrete element and the mathematical model is established by coordinate transformation through the relationship between its cross-section centroid and the displacement angle of the mid-surface of the shell. Modified Fourier series are selected as displacement penalty functions to integrate the displacement expression of the cylinder, plate, and T-shape ring stiffeners. The penalty functions are introduced to change the spring stiffness to simulate the continuous conditions between the bulkhead shells and the boundary conditions at both ends. The governing equations for the vibration of the coupled structure are obtained by means of energy functions. [Results] The convergence, accuracy, and reliability of the proposed method are verified through a comparison with the numerical method results. [Conclusion] This paper shows that the number and position of the T-shape ring stiffeners and bulkheads are closely related to the natural vibration characteristics of the coupled structure, providing certain references for engineering design and applications.

Key words: cylindrical shell; vibration characteristics; T-shape ring stiffeners; bulkheads; Rayleigh-Ritz method; improved Fourier series

收稿日期: 2024-05-27 修回日期: 2024-07-22

基金项目: 国防科技创新特区项目资助(23-TQ02-03-ZT-01-007)

作者简介: 张帅, 男, 1993 年生, 博士, 工程师。E-mail: 609168930@qq.com

纪仁超, 男, 1991 年生, 硕士, 工程师。E-mail: 1556470952@qq.com

*通信作者: 张帅

0 引言

薄壳理论自从 19 世纪末由基尔霍夫-乐甫假设建立至今,已百年有余。在此期间,经过大量学者及工程师的研究、补充以及发展,各种板壳理论已趋于稳定成熟^[1-4]。圆柱壳作为其中一种经典且实用的结构,在船舶建造、航空航天、桥梁管道等多种工程项目的设计制造中尤为常见。以船舶建造为例,为了加强舱段结构的刚度而又不过多地增加其质量,通常会给舱段结构增加环肋和舱壁。舱壁一般可近似为开口板结构,T 型环肋因其截面特性而具有强度高、稳定性好的优势,常被用来加强舱段结构。圆柱壳和开口板以及 T 型环肋三者的结构耦合导致整个系统的振动机理变得较为复杂,研究此类耦合结构的振动特性对于船舶设计而言意义重大。目前,大部分有关圆柱壳内部环肋的研究和计算方法都集中在矩形截面环肋,而较少分析截面为 T 型的环肋,且鲜有文献同时考虑 T 型环肋及舱壁对振动系统带来的影响。因此,针对含 T 型环肋及舱壁圆柱壳的自由振动问题,开展理论研究具有较为重要的工程指导意义。

迄今,国内外已有不少关于环肋锥、柱壳振动特性的研究。大体来说,分析环肋最常用的方法是刚度均摊法和离散单元法,前者是把环肋的刚度和质量平均分布到壳体表面来求解含环肋结构的振动性能。Hoppmann^[5]采用刚度均摊法研究了正交加筋圆柱壳的振动特性,理论结果与试验方法吻合较好,验证了计算方法的正确性。Lee 和 Kim^[6]将环肋纵筋当作结构的一部分,采用能量的方法分析了正交环肋纵筋复合圆柱壳的自由振动特性。李天匀等^[7-8]等基于 Flügge 壳体理论,结合波传播法和伽辽金法及刚度均摊法,分析了水下圆锥壳及其环肋模型的临界载荷。由于刚度均摊法仅适用于环肋均匀密集分布情况,因此在应用时有一定的局限性。离散单元法最早由 Galletly^[9]提出,该方法可将环肋当作离散单元考虑,且能够解决其任意分布的问题而得到较为广泛的应用。Wang 等^[10]通过离散单元法,将环肋等效为曲梁结构,考虑了环肋的转动惯量,给出了环肋在运动和位置变化下产生的动能势能表达式,分析了圆柱壳加周向外环肋的自由振动特性。Talebitooti 等^[11]采用 Ritz 法计算了复合材料正交环肋纵筋圆锥壳的自由振动特性,并给出了另一种简化形式的离散环肋动能势能表达式。骆东平和赵玉喜^[12]通过离散单元法,讨论了环肋圆锥壳的边

界条件变化、环肋尺寸、间距,以及半锥角对其固有频率的影响。

上述研究对象均为环肋锥壳或环肋柱壳且未涉及舱壁。从现有文献来看,一般将舱壁看作开口板或者圆板来处理。张俊等^[13]基于 Rayleigh-Ritz 法,选用改进傅里叶级数作为位移函数,研究了任意边界条件下典型形状的开口矩形薄板的自由振动。Tso^[14]采用波传播法研究了半无限长圆柱壳与圆环板、圆板、无限大板连接处的波传播特性。但上述文献均未讨论环肋所带来的效应。陈美霞等^[15]采用 Flügge 壳体理论,采用波动法构建了加筋舱壁圆柱壳的结构模型,将环肋近似为圆环板,分析了该结构模型的振动频响特性。然而,波动法不易求解截面为 T 型的环肋,且研究的结构采用了多种形式的位移函数,使得物理建模和计算过程较为复杂。

本文主要工作是建立含 T 型环肋及舱壁圆柱壳的理论振动模型,研究其在不同边界条件下的自由振动特性,同时讨论二者的数量、分布对圆柱壳振动的影响。首先,分别采用基于薄板理论的圆环板模拟舱壁、基于欧拉-伯努利梁理论的曲梁模拟 T 型环肋,以及基于 Love 壳体理论获得圆柱壳的能量方程,选取改进傅里叶级数作为圆柱壳、舱壁和环肋耦合系统的位移惩罚函数,统一位移表达形式并减少刚度质量矩阵的计算维度;接着,引入惩罚函数构建施加在圆柱壳和舱壁连接处及柱壳两端边界的能量方程,通过改变弹簧刚度系数模拟不同边界条件;最后,采用能量变分原理推导得到梁-板-壳耦合系统振动方程,对含 T 型环肋及舱壁圆柱壳不同参数进行计算,并与有限元仿真结果进行对比,验证本文方法的收敛性和准确性。

1 理论分析

1.1 理论模型描述

本文研究的含 T 型环肋及舱壁的圆柱壳正视图和右视图及 T 型环肋截面图分别如图 1~图 3 所示。图 1 中,圆柱壳柱坐标系 (x, θ, z) 的起点建立在柱壳最左端,其中: x, θ, z 分别表示圆柱壳的轴向、周向和径向; h_c 为壳体厚度; u_c, v_c (见图 2), w_c 分别为圆柱壳的轴向、周向和径向这 3 个方向的位移; R_{bh} 为舱壁内径; R 为圆柱壳中面半径或舱壁外径; h_{bh} 为舱壁厚度; u_{bh}, v_{bh} (见图 2), w_{bh} 分别表示舱壁的径向、周向和横向位移; L_c 为圆柱壳长度; d_r 为环肋之间的间距。图 2 中: θ 的方向为由图 1 右侧向左侧看顺时针方向, r_{bh} 表示极坐

标系下的一个方向。图 3 中, T 型环肋平行于 x 轴翼板和垂直于 x 轴腹板的长宽分别为 b_t , t_2 和 h_t , t_1 ; e_k 为偏心距。假设圆柱壳、舱壁、T 型环肋是由各向同性且匀质等厚的同种材料构成, 三者的弹性模量、泊松比、密度分别为 E , μ , ρ 。

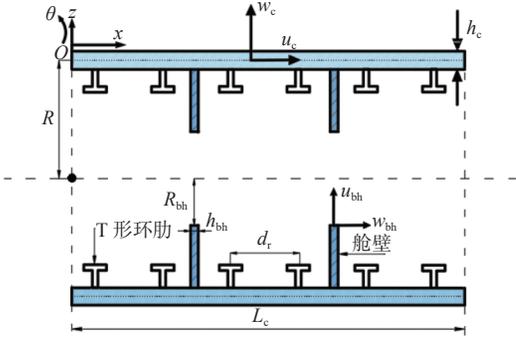


图 1 含 T 型环肋及舱壁圆柱壳正面截面示意图

Fig. 1 Front section view of cylindrical shell with T-section rings and bulkheads

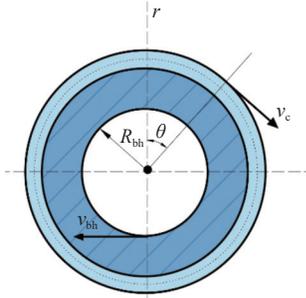


图 2 含 T 型环肋以及舱壁圆柱壳右侧截面示意图

Fig. 2 Right section view of cylindrical shell with T-section rings and bulkheads

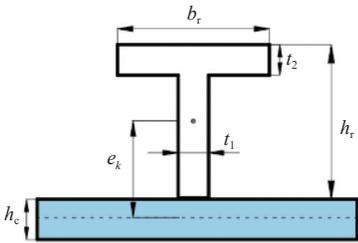


图 3 T 型环肋截面示意图

Fig. 3 Section view of a T-section ring

1.2 圆柱壳能量方程

根据基尔霍夫假设以及经典 Love 壳体理论^[2], 可以得到圆柱壳线性应变与位移之间的方程:

$$\varepsilon_{\alpha c} = \frac{1}{A_c} \frac{\partial u_c}{\partial \alpha_c} + \frac{v_c}{A_c B_c} \frac{\partial A_c}{\partial \beta_c} + \frac{w_c}{R_{\alpha c}} \quad (1)$$

$$\varepsilon_{\beta c} = \frac{u_c}{A_c B_c} \frac{\partial B_c}{\partial \alpha_c} + \frac{1}{B_c} \frac{\partial v_c}{\partial \beta_c} + \frac{w_c}{R_{\beta c}} \quad (2)$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta c} = \frac{A_c}{B_c} \frac{\partial}{\partial \beta_c} \left(\frac{u_c}{A_c} \right) + \frac{B_c}{A_c} \frac{\partial}{\partial \alpha_c} \left(\frac{v_c}{B_c} \right) \quad (3)$$

$$k_{\alpha c} = \frac{1}{A_c} \frac{\partial}{\partial \alpha_c} \left(\frac{u_c}{R_{\alpha c}} - \frac{1}{A_c} \frac{\partial w_c}{\partial \alpha_c} \right) + \frac{1}{A_c B_c} \left(\frac{v_c}{R_{\beta c}} - \frac{1}{B_c} \frac{\partial w_c}{\partial \beta_c} \right) \frac{\partial A_c}{\partial \beta_c} \quad (4)$$

$$k_{\beta c} = \frac{1}{A_c B_c} \left(\frac{u_c}{R_{\alpha c}} - \frac{1}{A_c} \frac{\partial w_c}{\partial \alpha_c} \right) \frac{\partial B_c}{\partial \alpha_c} + \frac{1}{B_c} \frac{\partial}{\partial \beta_c} \left(\frac{v_c}{R_{\beta c}} - \frac{1}{B_c} \frac{\partial w_c}{\partial \beta_c} \right) \quad (5)$$

$$\tau_{\alpha\beta c} = \frac{A_c}{B_c} \frac{\partial}{\partial \beta_c} \left(\frac{\frac{u_c}{R_{\alpha c}} - \frac{1}{A_c} \frac{\partial w_c}{\partial \alpha_c}}{A_c} \right) +$$

$$\frac{B_c}{A_c} \frac{\partial}{\partial \alpha_c} \left(\frac{\frac{v_c}{R_{\beta c}} - \frac{1}{B_c} \frac{\partial w_c}{\partial \beta_c}}{B_c} \right) + \frac{1}{R_{\alpha c}} \left(\frac{1}{B_c} \frac{\partial u_c}{\partial \beta_c} - \frac{v_c}{A_c B_c} \frac{\partial B_c}{\partial \alpha_c} \right) +$$

$$\frac{1}{R_{\beta c}} \left(\frac{1}{A_c} \frac{\partial v_c}{\partial \alpha_c} - \frac{u_c}{A_c B_c} \frac{\partial A_c}{\partial \beta_c} \right) \quad (6)$$

式(1)~式(6)中: α_c 和 β_c 表示圆柱壳的轴向和周向; $\varepsilon_{\alpha c}$ 和 $\varepsilon_{\beta c}$ 表示轴向和周向的线应变; $\varepsilon_{\alpha\beta c}$ 表示轴向和周向的切应变; $k_{\alpha c}$ 和 $k_{\beta c}$ 表示轴向和周向的曲率改变量; $\tau_{\alpha\beta c}$ 表示轴向和周向的扭率改变量; A_c 和 B_c 为拉梅(Lamé)系数; $R_{\alpha c}$ 和 $R_{\beta c}$ 为轴向和周向的曲率半径。

由式(1)~式(6)可以得到圆柱壳的势能方程和动能方程, 依次如下:

$$U_c = \frac{K}{2} \iint_s \left[(\varepsilon_{\alpha c})^2 + (\varepsilon_{\beta c})^2 + 2\mu \varepsilon_{\alpha c} \varepsilon_{\beta c} + \frac{1-\mu}{2} (\varepsilon_{\alpha\beta c})^2 \right] A_c B_c dS + \frac{D}{2} \iint_s \left[(k_{\alpha c})^2 + (k_{\beta c})^2 + 2\mu k_{\alpha c} k_{\beta c} + \frac{1-\mu}{2} (\tau_{\alpha\beta c})^2 \right] A_c B_c dS \quad (7)$$

$$T_c = \frac{\rho h_c}{2} \iint_s \left[\left(\frac{\partial u_c}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_c}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_c}{\partial t} \right)^2 \right] A_c B_c dS \quad (8)$$

式(7)~式(8)中: $K = Eh_c / (1 - \mu^2)$, 为圆柱壳的薄膜刚度; dS 为圆柱壳表面积分的微元面积; $D = Eh_c^3 / [12(1 - \mu^2)]$, 为圆柱壳的弯曲刚度。

1.3 圆环板能量方程

由经典的薄板理论^[1]可以得到在极坐标系下圆环板的弯曲形变能和动能分别如下:

$$U_{bh} = \frac{D}{2} \int_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 w_{bh}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_{bh}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_{bh}}{\partial \theta^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \left\{ \frac{\partial^2 w_{bh}}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_{bh}}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w_{bh}}{\partial \theta^2} \right) - \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_{bh}}{\partial \theta} \right) \right]^2 \right\} \right\} dA \quad (9)$$

$$T_{bh} = \frac{1}{2} \rho h_{bh} \int_A \left(\left(\frac{\partial u_{bh}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{bh}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{bh}}{\partial t} \right)^2 \right) r dA \quad (10)$$

式(9)~式(10)中: dA 为圆环板表面积分的微元面积; r 为圆环板外内径之差。

1.4 T型环肋能量方程

参考 Galletly 将欧拉-伯努利梁理论应用在环肋计算的方法^[9], 可以得到第 k 根离散 T 型环肋的应变能和动能表达式, 分别如下:

$$U_{rk} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[\frac{E_{rk} I_{xrk}}{R+e_k} \left(\frac{\partial w_{rk}}{\partial x} - \frac{1}{R+e_k} \frac{\partial u_{rk}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{E_{rk} I_{xrk}}{(R+e_k)^3} \left(w_{rk} + \frac{\partial^2 w_{rk}}{\partial \theta^2} \right)^2 + \frac{E_{rk} A_{rk}}{R+e_k} \left(w_{rk} + \frac{\partial v_{rk}}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{G_{rk} J_{rk}}{R+e_k} \left(\frac{\partial w_{rk}}{\partial x \partial \theta} + \frac{1}{R+e_k} \frac{\partial u_{rk}}{\partial \theta} \right)^2 \right] d\theta \quad (11)$$

$$T_{rk} = \frac{1}{2} \rho_{rk} \int_0^{2\pi} \left\{ A_{rk} \left[\left(\frac{\partial u_{rk}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_{rk}}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w_{rk}}{\partial t} \right)^2 \right] + (I_{xk} + I_{zk}) \left(\frac{\partial w_{rk}}{\partial x \partial t} \right)^2 + I_{xk} \frac{1}{R+e_k} \left(\frac{\partial^2 w_{rk}}{\partial \theta \partial t} \right)^2 \right\} (R+e_k) d\theta \quad (12)$$

第 k 根 T 型环肋形心处的 3 个位移以及 1 个转角与连接处柱壳中面的相应物理量坐标转化关系为

$$\begin{cases} u_{rk} = u_c - e_k \frac{\partial w_c}{\partial x} \\ v_{rk} = \left(1 + \frac{e_k}{R} \right) v_c - \frac{e_k}{R} \frac{\partial w_c}{\partial \theta} \\ w_{rk} = w_c \\ \beta_{rk} = \beta_c = \frac{\partial w_c}{\partial x} \end{cases} \quad (13)$$

以 T 型环肋翼板中心为原点建立直角坐标系, 取水平向右为 x 正方向, 垂直向下为 y 正方向, 再根据材料力学相关知识, 可以求出 T 型环肋的相关参数。具体如下:

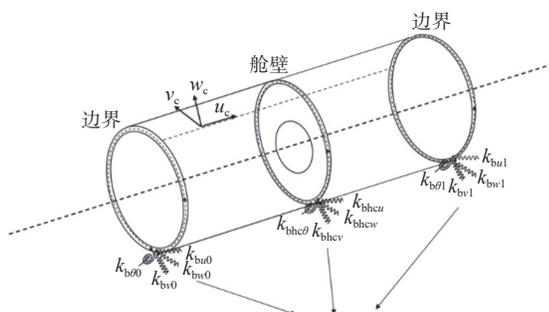
$$\begin{cases} A_{rk} = b_r t_2 + (h_r - t_2) t_1 \\ I_{xrk} = \frac{b_r t_2^3}{12} + b_r t_2 (y_c - t_2 / 2)^2 \\ I_{yrk} = \frac{(h_r - t_2) t_1^3}{12} + (h_r - t_2) t_1 (y_c - t_1 / 2 - t_2)^2 \\ J_{xrk} = \frac{1}{3} (b_r t_2^3 + (h_r - t_2) t_1^3) \\ y_c = \frac{b_r t_2^2 / 2 + (h_r - t_2) t_1 [(h_r - t_2) / 2 + t_2]}{b_r t_2 + (h_r - t_2) t_1} \end{cases} \quad (14)$$

式(11)~式(14)中: u_{rk} , v_{rk} , w_{rk} , β_{rk} , ρ_{rk} , E_{rk} , G_{rk} 分别为第 k 根环肋的轴向位移、周向位移、径向位移、转角、密度、杨氏模量和剪切模量; A_{rk} , I_{xrk} , I_{yrk} , J_{rk} , y_c 分别为第 k 根环肋的截面面积、环肋关于 x 轴

的截面惯性矩、环肋关于 z 轴的截面惯性矩、环肋横截面的扭转惯性矩和环肋形心的纵坐标。

1.5 连接与边界处能量方程

本文引入惩罚函数法^[16] 来解决结构连接与边界处的能量问题。采用 3 组平动弹簧和 1 组转动弹簧来约束圆柱壳和舱壁连接处以及圆柱壳两端边界处的位移和转角, 并通过改变圆柱壳两端边界处弹簧刚度模拟不同的边界条件, 如图 4 所示。图中: k_{bu0} , k_{bv0} , k_{bw0} , k_{bu1} , k_{bv1} , k_{bw1} , k_{bu1} 分别表示 $x=0$, $x=L_c$ 处约束位移和转角的弹簧刚度值; k_{bhcu} , k_{bhcv} , k_{bhcw} , k_{bhcu} 表示圆柱壳和舱壁连接处约束位移 γ 和转角的弹簧刚度值。



3组约束位移的平动线性弹簧和1组约束转角的转动线性弹簧沿连接处的虚线线性分布

图 4 圆柱壳两端边界及圆柱壳和舱壁连接处边界模拟图
Fig. 4 Simulation diagrams of boundary conditions for cylindrical shell ends and connections with bulkheads

储存在圆柱壳两端边界的弹簧势能为:

$$V_{b0} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[k_{bu0} u_c^2 + k_{bv0} v_c^2 + k_{bw0} w_c^2 + k_{b\theta 0} \frac{\partial w_c}{\partial x} \right]_{x=0} R d\theta \quad (15)$$

$$V_{b1} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left[k_{bu1} u_c^2 + k_{bv1} v_c^2 + k_{bw1} w_c^2 + k_{b\theta 1} \frac{\partial w_c}{\partial x} \right]_{x=L_c} R d\theta \quad (16)$$

储存在圆柱壳与舱壁连接处的弹簧势能为:

$$V_{bhc} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left\{ k_{bhcu} (u_{bh} - w_c)^2 + k_{bhcv} (v_{bh} - v_c)^2 + k_{bhcw} (w_{bh} + u_c)^2 + k_{bhcu} \left(\frac{\partial w_{bh}}{\partial x_{bh}} - \frac{\partial w_c}{\partial x_c} \right)^2 \right\} \Big|_{x_{bh}=R, x_c=x_L} R d\theta \quad (17)$$

1.6 位移惩罚函数

本文选用改进傅里叶级数作为位移惩罚函数, 这是因为其本身具有优良的数学性质, 能够满足在求解域内三阶导数连续且四阶导数存在的要求, 还可以提高计算效率, 这些均已在有关文献中得到证明和应用^[13,17]。本文位移惩罚函数表

达式具体如下:

$$u_i(x_i, \theta_i, t) = \left\{ \sum_{n=0}^N \left[\sum_{m=0}^M A_{imn} \cos(\lambda_m x_i) + \sum_{l=1}^4 a_{iln} \xi_l(x_i) \right] \cdot \right. \\ \left. \cos(n\theta_i) + \sum_{n=1}^N \left[\sum_{m=0}^M \tilde{A}_{imn} \cos(\lambda_m x_i) + \sum_{l=1}^4 \tilde{a}_{iln} \xi_l(x_i) \right] \cdot \right. \\ \left. \sin(n\theta_i) \right\} e^{j\omega t} \quad (18)$$

$$v_i(x_i, \theta_i, t) = \left\{ \sum_{n=1}^N \left[\sum_{m=0}^M B_{imn} \cos(\lambda_m x_i) + \sum_{l=1}^4 b_{iln} \xi_l(x_i) \right] \cdot \right. \\ \left. \sin(n\theta_i) + \sum_{n=0}^N \left[\sum_{m=0}^M \tilde{B}_{imn} \cos(\lambda_m x_i) + \sum_{l=1}^4 \tilde{b}_{iln} \xi_l(x_i) \right] \cdot \right. \\ \left. \cos(n\theta_i) \right\} e^{j\omega t} \quad (19)$$

$$w_i(x_i, \theta_i, t) = \left\{ \sum_{n=0}^N \left[\sum_{m=0}^M C_{imn} \cos(\lambda_m x_i) + \sum_{l=1}^4 c_{iln} \xi_l(x_i) \right] \cdot \right. \\ \left. \cos(n\theta_i) + \sum_{n=1}^N \left[\sum_{m=0}^M \tilde{C}_{imn} \cos(\lambda_m x_i) + \sum_{l=1}^4 \tilde{c}_{iln} \xi_l(x_i) \right] \cdot \right. \\ \left. \sin(n\theta_i) \right\} e^{j\omega t} \quad (20)$$

其中, 傅里叶展开项的系数向量可以写成:

$$\mathbf{q}_i = [A_{imn}, a_{iln}, \tilde{A}_{imn}, \tilde{a}_{iln}, B_{imn}, b_{iln}, \tilde{B}_{imn}, \tilde{b}_{iln}, C_{imn}, c_{iln}, \tilde{C}_{imn}, \tilde{c}_{iln}]^T \quad (21)$$

本文选用的 4 项辅助收敛函数如下:

$$\xi_l(x_i) = \sin(l\pi x_i/L_i), \quad 0 < l < 5 \quad (22)$$

式(18)~式(22)中: x_i 为轴向点的坐标, 下标 i ($i=c, bh$) 表示圆柱壳和舱壁; $\lambda_m = m\pi/L_i$; m, n 分别表示轴向波数和周向波数; j 为虚数单位; ω 为角频率; t 为时间; M, N 表示截断项数; l 取自然数。

综合式(7)~式(17)可以得到含 T 型环肋舱壁圆柱壳拉格朗日能量泛函 L 可表示为:

$$\Pi = (U_c - T_c) + (V_{b0} + V_{bi}) \sum_{nr=1}^{NR} (U_{rk}^{nr} - T_{rk}^{nr}) + \\ \sum_{nb=1}^{NB} (U_{bh}^{nb} + V_{bh}^{nb} + V_{bhc}^{nb}) \quad (23)$$

对能量泛函 Π 偏导求驻值:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{0} \quad (24)$$

最终, 得到如下自由振动控制方程:

$$(\mathbf{K}_{co} - \omega^2 \mathbf{M}_{co}) \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (25)$$

式(23)~式(25)中: \mathbf{K}_{co} 为刚度矩阵; \mathbf{M}_{co} 为质量

矩阵; \mathbf{q} 为待定傅里叶展开项系数; NR 为环肋总数; NB 为舱壁总数。求解式(25)的特征值, 可以得到结构的固有频率。

2 数值计算

2.1 方法收敛性分析

为验证本文方法的收敛性, 以圆柱壳两端自由边界为例, 计算不含 T 型环肋和舱壁的圆柱壳自由振动固有频率。几何材料参数如下: $R=1$ m, $L_c=3$ m, $h_c=0.01$ m, $E=210$ GPa, $\mu=0.3$, $\rho=7800$ kg/m³。取无量纲频率 $\Omega = \omega R \sqrt{\rho(1-\mu^2)}/E$, 无量纲平动弹簧刚度参数 $\Gamma_t = k_r R^3/D$, 无量纲转动弹簧刚度参数 $\Gamma_r = K_r R/D$, 下标 t 表示 $u_0, u_l, v_0, v_l, w_0, w_l$ 中任一项, 下标 r 表示 r_0, r_l 中的任一项, k_t 和 K_r 分别表示平动、转动弹簧刚度值(单位: N/m 和 N·m/rad); 4 组弹簧刚度值及对应边界条件见表 1。表中: F 表示自由边界, SD 表示软筒支边界, S 表示硬筒支边界, C 表示固支边界。规定边界条件前后符号分别表示 $x_c=0$ 及 $x_c=L_c$ 处边界。其中, x_c 表示舱壁板轴向坐标位置

表 1 弹簧刚度值及相应的各种边界条件

Table 1 Spring stiffness value and corresponding boundary conditions

边界条件	相应的弹簧刚度参数			
	Γ_{u0}, Γ_{ul}	Γ_{v0}, Γ_{vl}	Γ_{w0}, Γ_{wl}	Γ_{r0}, Γ_{rl}
F	0	0	0	0
SD	0	10 ³	10 ³	0
S	10 ³	10 ³	10 ³	0
C	10 ³	10 ³	10 ³	10 ³

圆柱壳在轴向、周向、径向这 3 个方向的位移均由多项正余弦函数累加而成, 因此截断项 M, N 的选取会影响计算精度。分别改变 M, N , 剔除 F-F 边界条件下圆柱壳前 6 阶刚体模态值, 得到本文方法与有限元方法(FEM)圆柱壳自由振动前 8 阶无量纲频率, 如表 2 所示。其中, FEM 方法中圆柱壳、舱壁由壳单元构建, T 型环肋由梁单元构建, 下文不再赘述。

如何选取等效于惩罚参数的弹簧刚度参数对于本文计算结果的准确性至关重要, 下面分析刚度参数取值对圆柱壳基频的影响。假设柱壳处 $x_c=0$ 边界为固支, $x_c=L_c$ 处为弹性边界, 分别单独改变 $x_c=L_c$ 处 3 组平动弹簧 $\Gamma_u, \Gamma_v, \Gamma_w$ 和 1 组转动弹簧 Γ_r 的刚度参数, 可以得到圆柱壳无量纲基频与刚度参数的关系, 如图 5 所示。

表2 F-F边界条件下不含环肋舱壁圆柱壳自由振动前8阶无量纲固有频率

Table 2 The first eight order dimensionless natural frequencies of free vibration for cylindrical shell without rings and bulkheads under F-F boundary condition

边界条件	模态阶数	无量纲固有频率					FEM
		$M \times N$					
		6×8	7×8	8×8	9×8	10×8	
F-F	1	0.00773	0.00773	0.00773	0.00773	0.00773	0.00773
	2	0.00907	0.00906	0.00906	0.00905	0.00905	0.00905
	3	0.02187	0.02187	0.02186	0.02186	0.02186	0.02186
	4	0.02385	0.02382	0.02382	0.02380	0.02380	0.02379
	5	0.04193	0.04193	0.04191	0.04191	0.04191	0.04191
	6	0.04418	0.04412	0.04412	0.04409	0.04409	0.04409
	7	0.06780	0.06780	0.06778	0.06778	0.06777	0.06782
	8	0.07019	0.07009	0.07009	0.07004	0.07004	0.07006

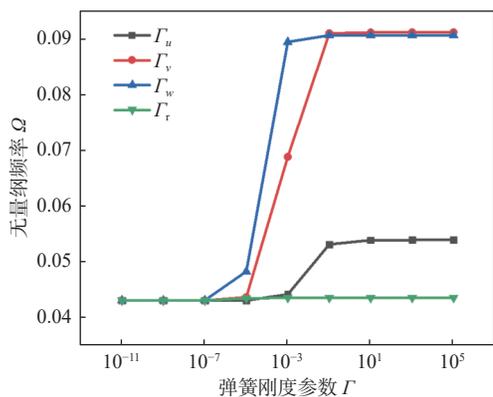


图5 圆柱壳基频随4组弹簧刚度参数变化曲线

Fig. 5 Variation in fundamental frequency of cylindrical shell with four sets of spring stiffness parameters

分析表2数据可知,圆柱壳自由振动无量纲频率随着截断数 M 的增大而逐渐趋于稳定,最终收敛结果与FEM计算结果吻合较好。可见,当 $M=10$ 和 $N=8$ 时已满足计算精度的要求,因此后文计算截断数取上述值。对比图5中4种弹性约束边界可以看出,刚度参数 Γ_v 对结构基频的影响最大, Γ_r 对结构基频影响最小。另外,弹簧刚度值 Γ 仅在 $10^{-5} \sim 10^{-1}$ 区间范围内对柱壳基频影响明显。若该刚度值大于上述范围,可近似认为刚性约束,故本文无量纲弹簧刚度参数取 10^3 为刚性约束值, $M=10$ 和 $N=8$ 满足本文要求。

2.2 T型环肋对圆柱壳作用的参数化分析

本节采用上文所提方法,从T型环肋数量、空间分布这两个方面讨论二者对圆柱壳结构振动的影响。为此,简化研究对象并设定为4种模型。其中:模型a表示不含环肋圆柱壳;模型b表示环肋等间距分布圆柱壳, $NR=10$, $d_r=0.3$ m;模型c表示环肋等间距分布圆柱壳, $NR=8$, $d_r=0.4$ m;模

型d表示环肋非等间距分布圆柱壳, $NR=8$, d_r 是一等差数列且首项公差为0.1 m。上述模型的环肋起点位置 $x_1=0.1$ m。环肋参数如下: $b_1=0.02$ m, $t_2=0.006$ m, $h_r=0.01$ m, $t_1=0.004$ m, $E_{rk}=210$ GPa, $\mu_{rk}=0.3$, $\rho_{rk}=7800$ kg/m³。本文模型所取T型环肋均为内环肋,故偏心率 e_k 取正值。

首先,验证本文方法计算环肋的准确性和可靠性。经FEM和本文方法的计算,下面给出了在3种经典边界条件下模型a~模型d在自由振动8阶无量纲固有频率,如表3~表6所示。

对比表3~表6可以看出,3种经典边界条件下本文方法求得的无量纲频率与FEM结果基本一致,表明了本文方法的准确性。

接着,分析上述表中的数据,将S-C边界条件下4种模型前8阶模态绘制成曲线,如图6所示。通过对比发现,即使环肋数量小幅增加也会导致同阶固有频率变大,这是因为T型环肋增大了整体结构的刚度,由式(25)也可知结构固有频率也会随之增大。另外,由上述表格数据可得:在S-S和C-C边界条件下结构固有频率几乎相等,这是因为转动弹簧限制的转角对结构振动贡献较小;与上述两种情况相比,SD-SD边界条件下的同阶固有频率明显减小,这表明在同阶模态下轴向、周向弹簧限制的位移或转角对结构振动效应影响较大。

然后,使用该方法讨论S-C边界条件下模型a、模型b、模型c和模型d每个周向波数下的首阶和二阶无量纲固有频率与周向波数之间的曲线关系,如图7和图8所示。

由图7和图8可看出:随着周向波数的增加,圆柱壳结构首阶和二阶无量纲固有频率均呈现先减小后增大的趋势。具体而言,当周向波数较小

表 3 3 种经典边界条件下模型 a 自由振动前 8 阶无量纲固有频率

Table 3 The first eight order dimensionless natural frequencies of free vibration for model a under three boundary conditions

模态阶数	边界条件					
	S-S		SD-SD		C-C	
	本文方法	FEM	本文方法	FEM	本文方法	FEM
1	0.10317	0.10324	0.07426	0.07429	0.10399	0.10398
2	0.11427	0.11432	0.08100	0.08105	0.11541	0.11533
3	0.11694	0.11705	0.10079	0.10081	0.11745	0.11752
4	0.14685	0.14705	0.10634	0.10644	0.14718	0.14735
5	0.15709	0.15713	0.14171	0.14191	0.15840	0.15828
6	0.17366	0.17384	0.15131	0.15143	0.17603	0.17592
7	0.18273	0.18295	0.16057	0.16067	0.18455	0.18458
8	0.18691	0.18725	0.16827	0.16846	0.18715	0.18748

表 4 3 种经典边界条件下模型 b 自由振动前 8 阶无量纲固有频率

Table 4 The first eight order dimensionless natural frequencies of free vibration for model b under three boundary conditions

模态阶数	边界条件					
	S-S		SD-SD		C-C	
	本文方法	FEM	本文方法	FEM	本文方法	FEM
1	0.12251	0.12188	0.09002	0.08910	0.12352	0.12278
2	0.13041	0.12880	0.10266	0.10238	0.13105	0.12938
3	0.15509	0.15494	0.11549	0.11360	0.15633	0.15603
4	0.16666	0.16363	0.16027	0.15708	0.16703	0.16397
5	0.20257	0.20160	0.17762	0.17700	0.20511	0.20379
6	0.20840	0.20603	0.17826	0.17752	0.21034	0.20775
7	0.21992	0.21483	0.19271	0.18999	0.22016	0.21505
8	0.23614	0.23588	0.20706	0.20666	0.23861	0.23824

表 5 3 种经典边界条件下模型 c 自由振动前 8 阶无量纲固有频率

Table 5 The first eight order dimensionless natural frequencies of free vibration for model c under three boundary conditions

模态阶数	边界条件					
	S-S		SD-SD		C-C	
	本文方法	FEM	本文方法	FEM	本文方法	FEM
1	0.12068	0.12011	0.08661	0.08576	0.12173	0.12105
2	0.12465	0.12319	0.10225	0.10199	0.12533	0.12381
3	0.15561	0.15380	0.10843	0.10671	0.15686	0.15417
4	0.15655	0.15547	0.14945	0.14654	0.15695	0.15656
5	0.19981	0.19879	0.17426	0.17319	0.20247	0.20064
6	0.20087	0.19897	0.17865	0.17857	0.20296	0.20082
7	0.20529	0.20057	0.18376	0.18138	0.20556	0.20126
8	0.23162	0.22746	0.20195	0.19714	0.23314	0.22885

时, 环肋对柱壳首阶和二阶固有频率影响较小, 甚至出现了增加环肋反而使固有频率减小的现象, 这是因为当周向波数 $n=1$ 时, 环肋的质量效应大于刚度效应, 导致固有频率略有降低; 当周

向波数较大时, T 型环肋对圆柱壳固有频率影响逐步显现, 这进一步表明 T 型环肋对于提高圆柱壳的中、高频固有频率效果较明显。此结论可为工程应用提供一定参考价值。

表 6 3 种经典边界条件下模型 d 自由振动前 8 阶无量纲固有频率

Table 6 The first eight order dimensionless natural frequencies of free vibration for model d under three boundary conditions

模态阶数	边界条件					
	S-S		SD-SD		C-C	
	本文方法	FEM	本文方法	FEM	本文方法	FEM
1	0.11938	0.11898	0.08448	0.08383	0.12043	0.11992
2	0.12056	0.11945	0.10197	0.10178	0.12123	0.12008
3	0.14888	0.14680	0.10372	0.10239	0.14929	0.14718
4	0.15585	0.15577	0.14112	0.13896	0.15710	0.15687
5	0.19270	0.18929	0.17296	0.17213	0.19309	0.18963
6	0.19757	0.19595	0.17921	0.17892	0.19958	0.19775
7	0.19856	0.19795	0.18088	0.17915	0.20118	0.20026
8	0.22533	0.22210	0.18778	0.18454	0.22680	0.22343

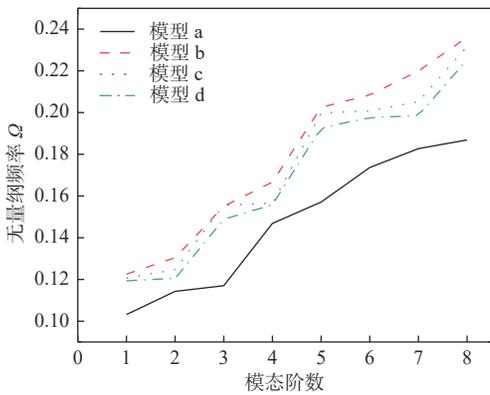


图 6 S-S 边界条件下 4 种模型无量纲固有频率对比

Fig. 6 Comparison of non-dimensional natural frequency for four models under S-S boundary condition

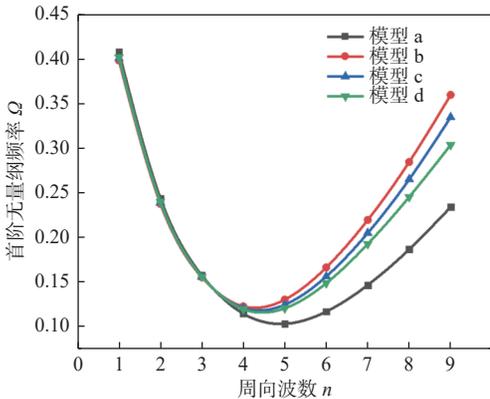


图 7 S-C 边界条件下 4 种模型首阶无量纲固有频率与周向波数关系

Fig. 7 Variation of the first-order dimensionless natural frequency with circumferential wave number for four models under S-C boundary condition

2.3 舱壁对圆柱壳作用的参数化分析

本节着重讨论舱壁数量及位置给圆柱壳振动带来的影响。为此，将研究对象设定为 3 种模型。其中：模型 e 表示含 1 个舱壁的圆柱壳且舱壁在 $x_c=1.5$ m 处；模型 f 表示含 2 个舱壁的圆柱壳

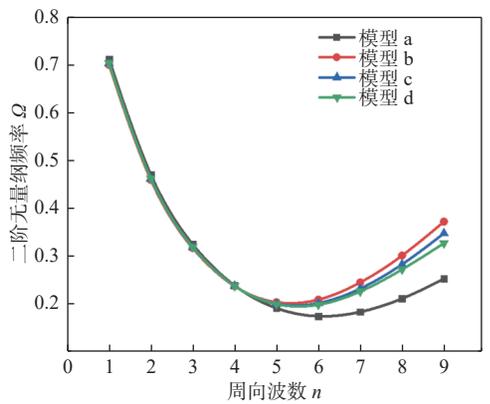


图 8 S-C 边界条件下 4 种模型二阶无量纲固有频率与周向波数关系

Fig. 8 Variation of the second-order dimensionless natural frequency with circumferential wave number for four models under S-C boundary condition

且舱壁分别在 $x_c=0.75$ m 和 $x_c=2.25$ m 处；模型 g 表示含 1 个舱壁的圆柱壳且舱壁在 $x_c=0.75$ m 处。

舱壁的参数为： $R=1$ m, $R_{bh}=0.2$ m, $h_{bh}=0.02$ m, $E_{bh}=210$ GPa, $\mu_{bh}=0.3$, $\rho_{bh}=7800$ kg/m³。

参照前文所述计算方法，这里给出了 S-C 边界条件下模型 e、模型 f 和模型 g 前 8 阶无量纲固有频率与 FEM 方法的结果对比，如表 7 所示。

由分析表 7 中的数据可知：在 S-C 边界条件和本文方法及 FEM 方法下，模型 e、模型 f、模型 g 前 8 阶无量纲固有频率具有较好的一致性，表明了本文理论模型和方法的准确性。通过对比上述 3 个模型的结果可以发现：

- 1) 本文方法模型 f 前 8 阶中 0.047 83, 0.099 45, 0.099 49, 0.166 42, 0.166 47 均为 2 个舱壁板的局部模态，模型 g 前 8 阶中 0.047 90, 0.099 55, 0.166 54 均为一个舱壁板的局部模态，出现在舱壁处的局部模态随舱壁数量的增加而增多；
- 2) 圆柱壳周向波数为 6 时，对应模型 f 中的

表 7 S-C 边界条件下模型 e、模型 f、模型 g 自由振动前 8 阶无量纲固有频率对比

Table 7 Comparison of the first eight order dimensionless natural frequencies of free vibration for model e, f and g under S-C boundary condition

模态阶数	边界条件					
	模型e		模型f		模型g	
	本文方法	FEM	本文方法	FEM	本文方法	FEM
1	0.047 83	0.047 74	0.047 83	0.047 74	0.047 90	0.047 75
2	0.099 44	0.099 08	0.099 45	0.099 07	0.099 55	0.099 10
3	0.166 41	0.165 98	0.099 49	0.099 12	0.130 24	0.130 28
4	0.177 03	0.177 18	0.166 42	0.165 98	0.133 60	0.133 69
5	0.185 93	0.186 12	0.166 47	0.166 03	0.153 63	0.153 63
6	0.193 30	0.193 44	0.177 13	0.177 26	0.157 00	0.157 18
7	0.198 91	0.199 11	0.186 72	0.186 90	0.166 54	0.166 01
8	0.201 57	0.201 83	0.191 24	0.191 35	0.193 66	0.193 98

无量纲频率为 0.177 13, 模型 g 中为 0.133 60; 圆柱壳周向波数为 7 时, 对应模型 f 中的无量纲频率为 0.186 72, 模型 g 中为 0.157 00; 圆柱壳周向波数为 5 时, 对应模型 f 中的无量纲频率为 0.191 24, 模型 g 中为 0.130 24。由此说明, 只考虑舱壁对圆柱壳的影响, 舱壁数量越多, 圆柱壳-舱壁耦合结构的固有频率会越大, 这是因为舱壁的存在使得每段圆柱壳的长度减小, 增大了式(25)中的刚度矩阵;

3) 分析模型 e 和模型 g 的数据, 舱壁所在位置对圆柱壳固有频率影响较大。在舱壁数量相同的情况下, 位于中间的舱壁对结构整体均摊刚度的提升贡献大于其他位置。

为进一步分析 T 型环肋和舱壁同时对圆柱壳振动特性的影响, 首先设定一种新的分析模型 h, 该模型为含环肋舱壁的圆柱壳, 其 T 型环肋分布与模型 c 相同, 舱壁分布与模型 e 相同。然后, 采用本文方法分析讨论 S-C 边界条件下模型 a、模型 c、模型 e 和模型 h 的前 8 阶无量纲固有频率, 结果如图 9 所示。

由图 9 可得: T 型环肋及舱壁可以明显增大圆柱壳固有频率。对比模型 a 和模型 e 可知: 模态阶数为 1 和 2 时, 圆柱壳内部舱壁出现局部模态, 此时耦合结构固有频率模型 a 大于模型 c; 随着模态增大, 模型 c 的圆柱壳弯曲模态出现, 此时对应的固有频率要大于同阶模型 a, 这是因为舱壁增大了结构的刚度。对比模型 e 和模型 h, 前 3 阶均为舱壁的局部模态, 因此二者几乎相同, 随着模态阶数的增大, T 型环肋带来的刚度增加便明显体现出来, 表现为固有频率显著增大。

3 结论

本文提出了一种半解析方法来研究一般边界

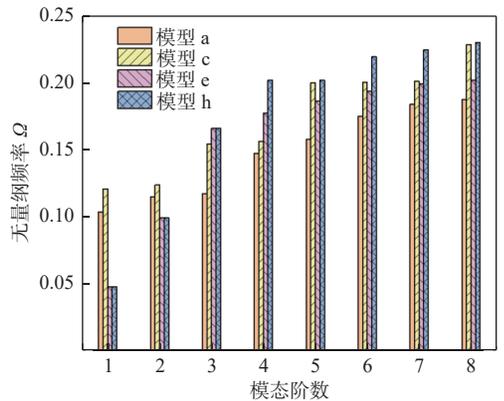


图 9 S-C 边界条件下 4 种模型前 8 阶无量纲固有频率与模态阶数的柱状图

Fig. 9 Histogram of the first eight order dimensionless natural frequencies and modal numbers of four models under S-C boundary condition

条件下含 T 型环肋及舱壁的圆柱壳自由振动特性。首先, 建立圆柱壳、舱壁和 T 型环肋的数学物理模型, 采用改进傅里叶级数作为梁-板-壳耦合结构的位移方程, 形式简洁统一; 其次, 引入惩罚函数法表示结构边界和结构连接处存储的势能; 然后, 通过能量泛函得到圆柱壳固有频率; 最后, 对含 T 型环肋及舱壁的圆柱壳不同参数进行计算, 并与 FEM 方法所得结果对比, 验证了本文方法的收敛性和准确性。经分析所得结论总结如下:

1) 经过对本文所提方法的收敛性和准确性分析, 并与 FEM 方法所得结果的多次对比, 表明两种方法结果基本一致, 本文方法准确可行。

2) T 型环肋可显著改变圆柱壳的自由振动特性。即使小幅度增加 T 型环肋数量, 也会导致同阶圆柱壳固有频率变大。T 型环肋数量相同时, 等间距分布带来的结构刚度增强效应大于非等间距分布, 固有频率会更大。

3) 增加圆柱壳内部的舱壁板后, 耦合结构振动模态会变复杂, 即出现舱壁板的局部模态。舱壁板的位置和数量均会影响圆柱壳的振动, 当变量仅为舱壁时, 增加舱壁板数量, 圆柱壳结构刚度增大, 整体结构的弯曲模态固有频率会相应增大。位于圆柱壳中间的舱壁对结构整体均摊刚度的提升贡献最大。

参考文献:

- [1] LEISSA A W. Vibration of plates[M]. Washington, D.C: National Aeronautics and Space Administration, 1969: 7–21.
- [2] LEISSA A W. Vibration of shells[M]. Washington, D.C: National Aeronautics and Space Administration, 1973: 31–43.
- [3] 曹志远. 板壳振动理论 [M]. 北京: 中国铁道出版社, 1989. CAO Z Y. Vibration theory of plates and shells [M]. Beijing: Railway Publishing House, 1989 (in Chinese).
- [4] LIEW K M, LIM C W, KITIPORNCHAI S. Vibration of shallow shells: a review with bibliography[J]. *Applied Mechanics Reviews*, 1997, 50(8): 431–444.
- [5] HOPPMANN, W H. Some characteristics of the flexural vibrations of orthogonally stiffened cylindrical shells [J]. *Journal of the Acoustical Society of America*, 1958, 30(1): 772.
- [6] LEE Y S, KIM Y W. Vibration analysis of rotating composite cylindrical shells with orthogonal stiffeners[J]. *Computers & Structures*, 1998, 69(2): 271–281.
- [7] 李天匀, 郭文杰, 朱翔, 等. 水下圆锥壳临界载荷—频率特性分析 [J]. 哈尔滨工程大学学报, 2015, 36(6): 746–749. LI T Y, GUO W J, ZHU X, et al. Frequency characteristic analysis of critical loads for a submerged conical shell[J]. *Journal of Harbin Engineering University*, 2015, 36(6): 746–749 (in Chinese).
- [8] 张帅, 李天匀, 郭文杰, 等. 水下环肋圆锥壳临界压力—频率特性分析 [J]. 中国舰船研究, 2019, 14(2): 77–82. ZHANG S, LI T Y, GUO W J, et al. Critical pressure-frequency characteristics analysis for ring-stiffened submerged conical shells[J]. *Chinese Journal of Ship Research*, 2019, 14(2): 77–82 (in both Chinese and English).
- [9] GALLETLY G D. On the in-vacuo vibrations of simply supported, ring-stiffened cylindrical shells[C]//Proceeding of the Second National Congress of Applied Mechanics Processing. Ann Arbor: University of Michigan, 1954: 225–231.
- [10] WANG C M, SWADDIWUDHIPONG S, TIAN J. Ritz method for vibration analysis of cylindrical shells with ring stiffeners[J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 1997, 123(2): 134–142.
- [11] TALEBITOOTI M, GHAYOUR M, ZIAEI-RAD S, et al. Free vibrations of rotating composite conical shells with stringer and ring stiffeners[J]. *Archive of Applied Mechanics*, 2010, 80(3): 201–215.
- [12] 骆东平, 赵玉喜. 环肋圆锥壳自由振动特性分析 [J]. 振动与冲击, 1990(4): 64–69. LUO D P, ZHAO Y X. Analysis of vibrational characteristics of ring-stiffened cylindrical shells[J]. *Journal of Vibration and Shock*, 1990(4): 64–69 (in Chinese).
- [13] 张俊, 李天匀, 朱翔, 等. 中心典型形状开口的矩形薄板自由振动特性分析 [J]. 中国舰船研究, 2018, 13(2): 76–83. ZHANG J, LI T Y, ZHU X, et al. Analysis of free vibration characteristics of thin rectangular plate with typically-shaped central opening[J]. *Chinese Journal of Ship Research*, 2018, 13(2): 76–83 (in Chinese).
- [14] TSO Y K, HANSEN C H. Wave propagation through cylinder/plate junctions[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 1995, 186(3): 447–461.
- [15] 陈美霞, 谢坤, 魏建辉. 多舱段圆柱壳振动特性研究 [J]. 振动工程学报, 2014, 27(4): 555–564. CHEN M X, XIE K, WEI J H. Vibration characteristics of multiple cabins of cylindrical shell[J]. *Journal of Vibration Engineering*, 2014, 27(4): 555–564 (in Chinese).
- [16] MONTEERRUBIO L E. Free vibration of shallow shells using the Rayleigh–Ritz method and penalty parameters [J]. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*, 2009, 223(10): 2263–2272.
- [17] LI W L. Vibration analysis of rectangular plates with general elastic boundary supports[J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2004, 273(3): 619–635.