网络首发地址：https://kns.cnki.net/kcms/detail/42.1755.TJ.20210329.1313.003.html 期刊网址：www.ship-research.com

引用格式：王小明，魏强，潘曼. 等效刚度法计算波纹夹层板弯曲变形与应力 [J]. 中国舰船研究，2021，16(2): 90–98，107.
WANG X M, WEI Q, PAN M. Calculation bending deflection and stress for corrugated core sandwich panels employing equivalent stiffness method[J]. Chinese Journal of Ship Research, 2021, 16(2): 90–98, 107.

等效刚度法计算波纹夹层板弯曲变形与应力

扫码阅读全文

王小明[*1]，魏强[1,2]，潘曼[1]

1 中国舰船研究设计中心，湖北 武汉 430064

2 船舶振动噪声重点实验室，湖北 武汉 430064

摘　要：［**目的**］为探索波纹夹层板弯曲问题的计算方法，求解波纹夹层板的弯曲变形与应力，提出一种等效刚度法。［**方法**］将波纹夹层板中间芯层等效成正交异性体，应用卡氏定理求解芯层的等效弹性模量，最后应用层合板理论计算夹层板的整体刚度。依据夹层板的整体刚度，求解正交异性板的弯曲平衡方程，计算出夹层板的弯曲变形分布；通过求出的变形，应用虎克定律，即可推导夹层板的弯曲应力分布。［**结果**］通过算例验证，与文献 [7] 的方法相比，本文方法计算的刚度误差为−6.98%；与有限元法相比，本文方法计算的夹层板变形最大误差为−2.01%，应力最大误差为 3.63%。［**结论**］这种分层累加计算整体刚度的方法，不仅可避免完全直接采用文献 [7] 的方法计算刚度时的复杂繁琐推导，而且用于弯曲计算还可获得较好的精度。

关键词：波纹夹层板；等效刚度；弯曲变形；弯曲应力；等效模量

中图分类号：U661.42　　**文献标志码：**A　　**DOI：**10.19693/j.issn.1673-3185.01873

Calculation bending deflection and stress for corrugated core sandwich panels employing equivalent stiffness method

WANG Xiaoming[*1], *WEI Qiang*[1,2], *PAN Man*[1]

1 China Ship Development and Design Center, Wuhan 430064, China

2 National Key Laboratory on Ship Vibration & Noise, Wuhan 430064, China

Abstract: ［**Objectives**］In order to develop a computation method for the corrugated core panel bending issue and solve the bending deflection and stress of such panels, an equivalent stiffness method is proposed. ［**Methods**］First, the middle cores of these sandwich panels are taken as equivalent to orthotropic elastic materials, then the equivalent elastic modulus of the cores are solved by Castigliano's theorem and the integral stiffnesses of the sandwich panels are calculated by laminated plate theory. According to the solved integral stiffness constants, the distribution of bending deflection is achieved by solving the orthotropic plate bending equilibrium equations, and stress distribution is derived by adopting Hooke's law. ［**Results**］It is validated that the stiffness error evaluated by this proposed method is −6.98% compared with the method in literature(Ref.[7]), the maximum error of deflection is −2.01% and stress is 3.63%, which correspond with the FEM results. ［**Conclusions**］This proposed method for calculating integral stiffness through layered accumulation not only avoids the complicated derivation of applying the method of Ref.[7] completely, but also satisfies calculation precision when computing the bending issue.

Key words: corrugated core sandwich panels; equivalent stiffness; bending deformation; bending stress; equivalent modulus

收稿日期：2020–01–02　　**修回日期：**2020–04–02　　**网络首发时间：**2021–03–30 14:42

基金项目：中国船舶重工集团联合基金资助项目

作者简介：王小明，男，1981 年生，硕士，高级工程师。

魏强，男，1971 年生，博士，研究员。

潘曼，女，1992 年生，硕士，工程师。

***通信作者：**王小明

0　引　言

夹层板由上、下面板和支撑此 2 个面板的中间芯层组成。通常芯层与面板的连接方式可以是激光焊接[1-2], 也可以是粘结[3], 这样组成的新结构被称为结构复合材料。芯层的结构形式有波纹型(V 型), I 型, Y 型, O 型, Z 型和梯形等。与普通板或加筋板相比, 夹层板具有比强度和比刚度高的优点, 经常被应用到船舶工程、航空航天工程、列车车厢和桥梁工程中[4]。由于夹层板芯层具有形式多样、材料选择空间大、设计范围宽泛的优点, 所以得到了广泛的研究。

在波纹夹层板弯曲问题的研究中, 逐渐形成了 2 个研究方向: 一个方向是把波纹夹层板等效成正交异性板, 按照正交异性板进行求解[5]; 另一个方向则是直接根据芯层的实际形状, 忽略面板与芯层连接位置处的剪应力连续条件, 上、下面板运用经典薄板理论, 芯层采用一阶剪切变形理论求解[6]。

在第一个研究方向中, 等效刚度和等效弹性参数的确定和计算方法是重点。1951 年, Libove 等[7]把波纹夹层板整体等效成正交异性板, 考虑夹层板拉伸与弯曲耦合, 剪切与扭转耦合, 并在弯曲问题中考虑了横向剪切力, 运用变形等效原理推导了夹层板的等效刚度、等效模量和等效泊松比等弹性常数。后来, 文献 [7] 的研究成果受到很多学者的重视, 纷纷运用该方法研究其他结构形式的夹层板弹性常数, 例如, Fung 等[8-10] 研究了 Z 型和 C 型夹层板的弹性常数计算方法, Atashipour 等[11] 推导了正弦波纹芯层的弹性常数,Yu 等[3] 和 Nilsson 等[12] 沿用了文献 [7] 的方法, 但是将夹层板的生产工艺一并考虑, 即把面板与芯层间的粘结层或焊缝层的受力状态做定量分析, 推导了更为精准的弹性常数。此外, Shaban[13] 采用能量法研究了梯形芯层的等效弹性模量、模量与截面参数的变化规律, Bartolozzi [14-15], Park[16] 和 Wang [17] 分别采用不同方法研究了芯层的等效弹性模量, 然而, 如何根据芯层等效弹性模量来计算夹层板的整体刚度却未提及, 而直接按照文献 [7] 的方法求解夹层板整体弯曲刚度和剪切刚度, 其过程非常复杂。

为了避免推导过程的繁琐复杂, 本文在求解过程中, 将首先求解波纹夹层板的芯层等效弹性参数, 应用层合板理论计算整体弯曲刚度和剪切刚度, 然后将结果代入正交异性板弯曲微分方程中, 确定夹层板的弯曲微分方程, 最后采用双傅里叶级数法求解该微分方程, 从而计算出面板的位移和应力。

1　芯层等效弹性模量

芯层等效弹性模量的计算原理是变形等效, 即在外力相等的条件下波纹芯层实际的位移和均质模型的位移相等。Bartolozzi 等[14] 提出了一种计算正弦波纹板芯层等效弹性模量的方法, 本文参考这种方法, 推导波纹板的芯层弹性模量。波纹夹层板和坐标系如图 1 所示。图中: x 轴沿着芯层的母线方向, y 轴沿着芯层的波纹方向, z 轴指向下方垂直于 xoy 平面(xoy 平面位于夹层板芯层的中面); $z<0$ 一侧的面板叫上面板, $z>0$ 一侧的面板叫下面板, 其中, 上面板厚度为 t_t, 下面板厚度为 t_b, 芯层板厚 t_c, 芯层净高 h_c, 芯层周期长度 l_c, 芯层半周期斜面边长为 l, 芯层倾斜面与面板夹角为θ。分析时, 以普遍常见的上、下面板和芯层都用同一种材料制造的夹层板为研究对象, 材料的弹性模量为 E, 剪切弹性模量为 G, 泊松比为μ; 等效弹性模量推导过程中, x 方向长度设为单位长度。

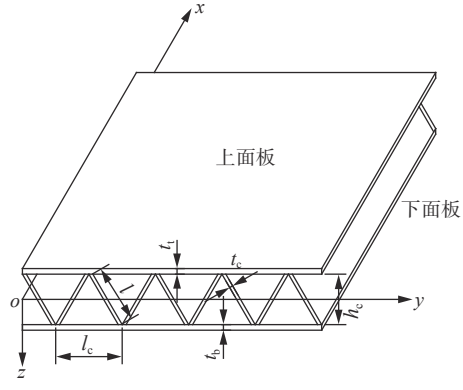

图 1　夹层板与坐标系统

Fig. 1　Sandwich and coordinate system

1.1　等效模量G_{yz}^{c}

根据夹层板的周期性, 为了简化公式推导, 把坐标系原点移到上面板与芯层中面交线的位置, 并转换视角, 使得 z_1 轴向上, 如图 2 所示。为了得到剪切模量G_{yz}^{c}, 在半周期芯层结构的最高点施加 x 方向的水平力 F_h, 需要求出在水平力 F_h 作用下的上边沿水平位移Δ_{ye1}。为了使结构处于纯剪切状态, 最高点的转角和非水平方向的位移均为 0。为达到这一条件, 需要在最高点施加虚拟的力矩 M_0 和垂直力 F_v, 使得垂直位移Δ_{ze1}和转角$\Delta_{\theta e1}$均为 0。

在图 2 所示的坐标系中, 半周期的芯层中心线方程可以表示为

$$f(y)=\frac{2h_c}{l_c}y \tag{1}$$

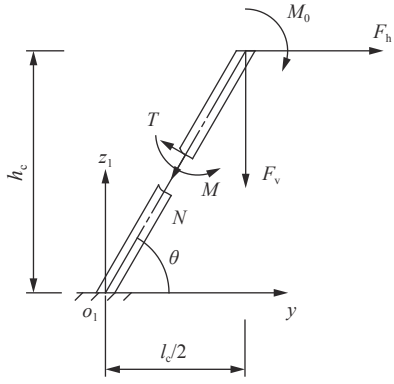

图 2 计算G_{yz}^c模型与坐标系统

Fig. 2 Model for calculating G_{yz}^c and coordinate system

图 2 所示的芯层任意一点的内力力矩 M、拉力 N 和剪切力 T 分别表示为

$$M_1 = F_h[h_c - f(y)] + F_v[l_c/2 - y] + M_0 \tag{2}$$

$$N_1 = F_h\cos\theta - F_v\sin\theta \tag{3}$$

$$T_1 = F_h\sin\theta + F_v\cos\theta \tag{4}$$

根据卡氏定理(Castigliano's theorem),芯层顶点的位移可以按照式(5)~式(7)计算。

$$\Delta_{ye1} = \int_0^{l_c/2}\left(\frac{M\dfrac{\partial M_1}{\partial F_h}}{EI} + \frac{N\dfrac{\partial N_1}{\partial F_h}}{EA} + \frac{T\dfrac{\partial T_1}{\partial F_h}}{G\kappa A}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\cos\theta} \tag{5}$$

$$\Delta_{ze1} = \int_0^{l_c/2}\left(\frac{M\dfrac{\partial M_1}{\partial F_v}}{EI} + \frac{N\dfrac{\partial N_1}{\partial F_v}}{EA} + \frac{T\dfrac{\partial T_1}{\partial F_v}}{G\kappa A}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\cos\theta} \tag{6}$$

$$\Delta_{\theta e1} = \int_0^{l_c/2}\left(\frac{M\dfrac{\partial M_1}{\partial M_0}}{EI} + \frac{N\dfrac{\partial N_1}{\partial M_0}}{EA} + \frac{T\dfrac{\partial T_1}{\partial M_0}}{G\kappa A}\right)\frac{\mathrm{d}y}{\cos\theta} \tag{7}$$

式中:I, A 分别为芯层纵截面的惯性矩和面积;κ为剪切修正系数。对于矩形截面,$I = t_c^3/12, A = t_c$, $\kappa = 5/6$。在纯剪切状态下,垂向位移Δ_{ze1}和转角$\Delta_{\theta e1}$均为 0。

将式(1)~式(4)代入式(5)~式(7),可以计算出这 3 项位移,用矩阵方式表示如下:

$$\begin{bmatrix}\Delta_{ye1}\\ \Delta_{ze1}\\ \Delta_{\theta e1}\end{bmatrix} = \frac{1}{EA}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ & a_{22} & a_{23}\\ sym. & & a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}F_h\\ F_v\\ M_0\end{bmatrix} \tag{8}$$

其中,

$$a_{11} = \frac{12}{t_c^2}\int_0^{l_c/2}[h_c - f(y)]^2\frac{\mathrm{d}y}{\cos\theta} + \int_0^{l_c/2}\cos\theta\mathrm{d}y + \frac{2(1+\mu)}{\kappa}\int_0^{l_c/2}\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\mathrm{d}y = \frac{2h_c^2 l_c}{t_c^2\cos\theta} + \frac{l_c\cos\theta}{2} + \frac{l_c(1+\mu)\sin^2\theta}{\kappa\cos\theta}$$

$$a_{12} = \frac{12}{t_c^2}\int_0^{l_c/2}[h_c - f(y)]\left(\frac{l_c}{2} - y\right)\frac{\mathrm{d}y}{\cos\theta} - \int_0^{l_c/2}\sin\theta\mathrm{d}y + \frac{2(1+\mu)}{\kappa}\int_0^{l_c/2}\sin\theta\mathrm{d}y = \frac{h_c l_c^2}{t_c^2\cos\theta} - \frac{l_c\sin\theta}{2} + \frac{l_c(1+\mu)\sin\theta}{\kappa}$$

$$a_{13} = \frac{12}{t_c^2}\int_0^{l_c/2}[h_c - f(y)]\frac{\mathrm{d}y}{\cos\theta} = \frac{3h_c l_c}{t_c^2\cos\theta}$$

$$a_{22} = \frac{12}{t_c^2}\int_0^{l_c/2}\left[\frac{l_c}{2} - y\right]^2\frac{\mathrm{d}y}{\cos\theta} + \int_0^{l_c/2}\sin^2\theta\frac{\mathrm{d}y}{\cos\theta} + \frac{2(1+\mu)}{\kappa}\int_0^{l_c/2}\cos\theta\mathrm{d}y = \frac{l_c^3}{2t_c^2\cos\theta} + \frac{l_c\sin^2\theta}{2\cos\theta} + \frac{l_c(1+\mu)\cos\theta}{\kappa}$$

$$a_{23} = \frac{12}{t_c^2}\int_0^{l_c/2}\left(\frac{l_c}{2} - y\right)\frac{\mathrm{d}y}{\cos\theta} = \frac{3l_c^2}{2t_c^2\cos\theta}$$

$$a_{33} = \frac{12}{t_c^2}\int_0^{l_c/2}\frac{\mathrm{d}y}{\cos\theta} = \frac{6l_c}{t_c^2\cos\theta}$$

简写为

$$\boldsymbol{\Delta} = \frac{1}{EA}\boldsymbol{aF} \tag{9}$$

式中:矩阵 $\boldsymbol{a}$ 包含元素 $a_{11}, a_{12}\cdots$;矩阵 $\boldsymbol{F}$ 包含元素 F_h, F_v, M_0。

在式(8)中代入$\Delta_{ze1} = 0, \Delta_{\theta e1} = 0$,则$\Delta_{ye1}$为

$$\Delta_{ye1} = \frac{1}{EA}\frac{|\boldsymbol{a}|}{a_{22}a_{33} - a_{23}^2}F_h = \frac{\left(l_c^2 + 4h_c^2\right)^2[\kappa l^2 + 2(1+\mu)t_c^2]F_h}{4Et_c l\{4\kappa h_c^2 t_c^2 + l_c^2[\kappa l^2 + 2(1+\mu)t_c^2]\}} \tag{10}$$

式中,$|\boldsymbol{a}|$为矩阵 $\boldsymbol{a}$ 的行列式。

芯层的等效弹性模量按如下定义求出:

$$G_{yz}^c = \frac{\tau_{yz1}}{\gamma_{yz1}} = \frac{2F_h/l_c}{\Delta_{ye1}/h_c} = \frac{8Et_c h_c l\{4\kappa h_c^2 t_c^2 + l_c^2[\kappa l^2 + 2(1+\mu)t_c^2]\}}{l_c(l_c^2 + 4h_c^2)^2[\kappa l^2 + 2(1+\mu)t_c^2]} \tag{11}$$

式中,τ_{yz1}和γ_{yz1}为与剪切模量G_{yz}^c对应的剪应力和剪应变。

1.2 等效弹性模量E_y^c

计算 y 方向的拉、压等效弹性模量E_y^c时,仅需要在半周期的芯层顶点加载水平力F_h和限制转角的力矩M_0,垂向位移不必限制。求等效弹性模量E_y^c的过程与 1.1 节的过程类似,仅需在 1.1 节的推导过程中令$F_v = 0$即可。半周期芯层中任意一点的内力可以表达为

$$M_2 = F_h[h_c - f(y)] + M_0 \tag{12}$$

$$N_2 = F_h\cos\theta \tag{13}$$

$$T_2 = F_h\sin\theta \tag{14}$$

此时, 上边缘水平位移为Δ_{ye2}, 转角为$\Delta_{\theta e2}$, 注意到$F_v=0$, 式(8)就退化为

$$\begin{bmatrix} \Delta_{ye2} \\ \Delta_{\theta e2} \end{bmatrix} = \frac{1}{EA}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_h \\ M_0 \end{bmatrix} \tag{15}$$

计算E_y^c时, 构件应该处于拉伸状态, 则转角$\Delta_{\theta e2}=0$, 求出

$$\Delta_{ye2}=\frac{1}{EA}\frac{a_{11}a_{33}-a_{13}^2}{a_{33}}F_h=\frac{\{\kappa l_c^2 t_c^2+4h_c^2[\kappa l^2+2(1+\mu)t_c^2]\}F_h}{4Et_c^3\kappa l} \tag{16}$$

夹层板芯层的弹性模量可以根据应力应变关系式求得:

$$E_y^c=\frac{\sigma_{y2}}{\varepsilon_{y2}}=\frac{F_h/h_c}{2\Delta_{ye1}/l_c}=\frac{2Et_c^3\kappa l l_c}{h_c\kappa l_c^2 t_c^2+4h_c^3[\kappa l^2+2(1+\mu)t_c^2]} \tag{17}$$

式中, σ_{y2}和ε_{y2}分别为与等效模量E_y^c对应的拉伸应力和拉伸应变。

1.3　等效弹性模量E_x^c

计算 x 方向的拉、压等效弹性模量E_x^c, 则仅需要在 x 方向加载ε_{x3}, 保证芯层的应变与均质等效模型的应变相同即可。

$$\varepsilon_{x3}=\frac{F_x}{Et_c l}=\frac{F_x}{E_x^c l_c h_c/2} \tag{18}$$

由此, 可得E_x^c为

$$E_x^c=\frac{2Et_c l}{h_c l_c} \tag{19}$$

1.4　等效模量G_{zx}^c和G_{yx}^c

计算夹层板芯层等效剪切模量G_{zx}^c时, 保持芯层处于纯剪切状态, 芯层顶部纵截面和底部纵截面加载方向相反的 F_x, 顶部沿着 x 轴正向(如图 3 所示)。为了保持平衡, 必须在芯层前、后截面加载方向相反的 $F_x l$。

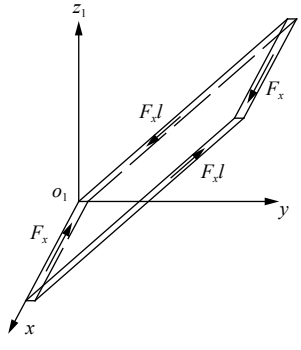

图 3　计算G_{zx}^c的力学模型

Fig. 3　Mechanics model for calculating G_{zx}^c

芯层前部截面的剪应力τ_4

$$\tau_4=\frac{F_x l}{l t_c}=\frac{F_x}{t_c}$$

如图 4 所示, 过芯层上边缘左侧端点 P 作与力 $F_x l$ 垂直的平面Π_1, Π_1平面的法向量为 $\boldsymbol{n}$, 该平面上的剪应力(方向垂直于纸面向外)可由剪应力互等定理得出也为 τ_4。芯层的左侧面命名为Π_2平面, 则Π_2平面与向量 $\boldsymbol{n}$ 平行, 即Π_2平面与Π_1平面垂直。在一系列与Π_2平面平行的平面族中, 芯层顶部矩形剪切变形Δ_{x4}为

$$\Delta_{x4}=\gamma_{zx4}l=\frac{\tau_4}{G}l=\frac{F_x l}{Gt_c} \tag{20}$$

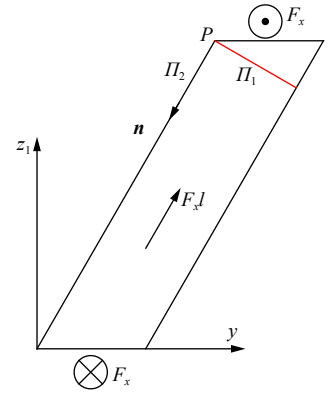

图 4　芯层前端面受力状态

Fig. 4　Stress state of the core front face

为了求得G_{zx}^c, 在均质等效模型上表面加同样载荷。则等效模型的剪切变形Δ_{xe4}为

$$\Delta_{xe4}=\gamma_{zxe4}h_c=\frac{F_x h_c}{G_{zx}^c A_e}=\frac{F_x h_c}{G_{xz}^c l_c/2}=\frac{2F_x h_c}{G_{xz}^c l_c} \tag{21}$$

式中, γ_{zx4}和γ_{zxe4}分别为原模型的剪切应变和等效模型的剪切应变。

原模型与等效模型具有相同的剪切变形, 即式(20)与式(21)相等, 则G_{zx}^c为

$$G_{zx}^c=\frac{2Gh_c t_c}{l l_c} \tag{22}$$

在推导G_{zx}^c时, 文献 [14] 加载外力的作用面法向量并非是图 4 中的 z_1 轴, 这与G_{zx}^c的定义似乎不相符。并且求解剪切变形采用的是铁摩辛柯(Timoshenko)梁理论, 这与芯层处于纯剪切的前提也不相符。

用同样方法可以推导出G_{yx}^c为

$$G_{yx}^c=\frac{Gl_c t_c}{2h_c l} \tag{23}$$

1.5　泊松比μ_{xy}^c和μ_{yx}^c

泊松比μ_{xy}^c是指 y 方向的应力引起的 x 方向的应变与 y 方向应变的负值, μ_{yx}^c的含义也类似。用公式表达为

$$\mu_{xy}^c=-\frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_y} \tag{24}$$

考虑 1.2 节的载荷状态，y 方向的应变为

$$\varepsilon_{y2}=\frac{2\Delta_{ye2}}{l_c} \tag{25}$$

沿着芯层板面的倾斜方向的应变为

$$\varepsilon_{l2}=\frac{F_h\cos\theta}{Et_c} \tag{26}$$

x 方向的应变为

$$\varepsilon_{x2}=-\mu\varepsilon_{l2}=-\frac{\mu F_h\cos\theta}{Et_c} \tag{27}$$

根据式(24)的定义，泊松比

$$\mu_{xy}^c=\frac{\mu F_h l_c\cos\theta}{2Et_c\Delta_h}=\frac{\mu\kappa t_c^2 l_c^2}{\kappa l_c^2 t_c^2+4h_c^2\left[\kappa l^2+2(1+\mu)t_c^2\right]} \tag{28}$$

考虑仅在 x 方向上给芯层施加外力 F_x，y 方向的应变可以表示为

$$\varepsilon_{y3}=\frac{\varepsilon_{l3}l\cos\theta}{l_c/2}=\varepsilon_{l3}=-\mu\varepsilon_{x3} \tag{29}$$

可得

$$\mu_{yx}^c=-\frac{\varepsilon_{y3}}{\varepsilon_{x3}}=\mu \tag{30}$$

通过式(17)及式(19)、式(28)及式(30)，可以看出泊松比满足正交异性体的关系式

$$E_x^c\mu_{xy}^c=E_y^c\mu_{yx}^c \tag{31}$$

由此，验证了以上公式推导的正确性。

2 波纹夹层板的等效参数

上、下面板是均质各向同性弹性体，芯层则当作正交异性体，这样可按照层合板理论来计算夹层板的整体刚度，这个过程实质上就是将各层的离轴折减刚度乘以惯性矩(面积)，按各层的贡献累加[18]。

2.1 波纹夹层板的横截面参数

根据前面的推导，波纹夹层板上、下面板及芯层相当于 3 层层合板，上、下两层是各向同性体，中间层是正交异形体。当上、下面板厚度不相等，即 $t_b\neq t_t$ 时，夹层板的中性层一般并非夹层板的厚度中间层，并且 xz 面内弯曲与 yz 面内弯曲中性层不重合。以下计算惯性矩，都是相对于对应的弯曲中性层而言。

定义面板中心间距 h

$$h=h_c+(t_t+t_b)/2 \tag{32}$$

单位宽度夹层梁(杆)的 x 向拉压刚度 $\overline{EA}_x$ 为

$$\overline{EA}_x=E(t_t+t_b)+E_x^c h_c \tag{33}$$

xz 面内弯曲时，中性层与下面板中芯层的间距 h_x 为

$$h_x=\frac{Et_t h+E_x^c h_c(h_c+t_b)/2}{\overline{EA}_x} \tag{34}$$

xz 面内弯曲，上、下面板的惯性矩 I_{xf} 为

$$I_{xf}=t_b h_x^2+t_t(h-h_x)^2 \tag{35}$$

xz 面内弯曲，芯层的等效惯性矩 I_{xc} 为

$$I_{xc}=h_c^3/12+h_c(h_c/2+t_b/2-h_x)^2 \tag{36}$$

类似地，可以定义单位宽度夹层梁(杆)的 y 向拉压刚度 $\overline{EA}_y$ 等上述对应的 4 个参数，仅需将式(33)~式(36)中的下标 x 换成 y 即可。

2.2 波纹夹层板的等效刚度

根据层合板理论[18]，可以将各层的刚度累加计算夹层板的总体刚度。

xz 面内弯曲刚度 D_1 为

$$D_1=\frac{EI_{xf}}{1-\mu^2}+\frac{E_x^c I_{xc}}{1-\mu_{xy}^c\mu_{yx}^c} \tag{37}$$

yz 面内弯曲刚度 D_2 为

$$D_2=\frac{EI_{yf}}{1-\mu^2}++\frac{E_y^c I_{yc}}{1-\mu_{xy}^c\mu_{yx}^c} \tag{38}$$

xz 面内弯曲与 yz 面内弯曲耦合刚度 D_{12} 为

$$D_{12}=\frac{\mu EI_{xf}}{1-\mu^2}+\frac{\mu_{xy}^c E_x^c I_{xc}}{1-\mu_{xy}^c\mu_{yx}^c} \tag{39}$$

$yz(xz)$ 面内的扭转刚度 D_k 为

$$D_k=GI_{xf}+G_{xy}^c I_{xc} \tag{40}$$

xz 面内弯曲的剪切刚度 C_1 为

$$C_1=G_{xz}^c h_c+G(t_t+t_b) \tag{41}$$

yz 面内弯曲的剪切刚度 C_2 为

$$C_2=G_{yz}^c h_c+G(t_t+t_b) \tag{42}$$

3 弯曲方程与求解

对于对称的波纹夹层板，其弯曲微分方程可以直接采用一阶剪切变形理论为基础的对称层合板弯曲微分方程[19]，即

$$\begin{cases}D_1\dfrac{\partial^2\varphi_x}{\partial x^2}+D_k\dfrac{\partial^2\varphi_x}{\partial y^2}+(D_{12}+D_k)\dfrac{\partial^2\varphi_y}{\partial x\partial y}-C_1\varphi_x+C_1\dfrac{\partial w}{\partial x}=0\\(D_{12}+D_k)\dfrac{\partial^2\varphi_x}{\partial x\partial y}+D_2\dfrac{\partial^2\varphi_y}{\partial y^2}+D_k\dfrac{\partial^2\varphi_y}{\partial x^2}-C_2\varphi_y+C_2\dfrac{\partial w}{\partial y}=0\\C_1\dfrac{\partial\varphi_x}{\partial x}+C_2\dfrac{\partial\varphi_y}{\partial y}-C_1\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}-C_2\dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2}-p=0\end{cases} \tag{43}$$

式中: φ_x, φ_y 和 w 分别为夹层板 xz 平面、yz 平面内的转角和横向位移; p 为横向载荷。

非对称的波纹夹层板弯曲方程比式(43)多 2 个未知函数, 即弯曲方程为 5 个联立方程组, 并且前述刚度中的惯性矩一般统一定义为相对于厚度中间层。非对称夹层板弯曲方程的推导可以采用最小势能原理。若波纹夹层板为对称结构, 则中性层就是中间层, 因此刚度定义可以直接采用式(37)~式(42)进行计算。

对于 x 向长为 a, y 向长为 b 的四边简支的夹层板, 边界条件为

$$\left.\begin{aligned} x=0,a;w=0,\varphi_y=0,\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}=0\\ y=0,b;w=0,\varphi_x=0,\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}=0\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

可以设式(43)的解为双傅里叶级数形式, 即

$$w=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}w_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{45}$$

$$\varphi_x=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi x_{mn}\cos\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \tag{46}$$

$$\varphi_y=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\varphi y_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b} \tag{47}$$

式中: w_{mn}, φx_{mn} 和 φy_{mn} 分别为对应的傅里叶系数; m, n 为傅里叶级数的项序数。

式(45)~式(47)已经满足了式(44)的边界条件。

横向载荷 p 若为集中力, 作用点的坐标为 (x_0, y_0), 可以把集中力展开成双傅里叶级数。

$$p=p\delta(x-x_0,y-y_0)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}4p\sin\frac{m\pi x_0}{a}\cos\frac{n\pi y_0}{b}\sin\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}/ab \tag{48}$$

式中, $\delta(x-x_0,y-y_0)$为二维狄拉克(Dirac)函数。

将式(45)~式(48)代入式(43), 比较两边的系数, 即每项合并后的傅里叶系数为 0, 可以分别求出式(45)~式(47)中双傅里叶级数的系数。

其他的载荷情况都可以通过将集中载荷累加(积分)得到。如 k 个集中载荷可以表示为 $\sum_{i=1}^{k}p_i\delta(x-x_{0i},y-y_{0i})$, 线性分布(均布)载荷可以表示为 $\iint_D p(x_0,y_0)\delta(x-x_0,y-y_0)\mathrm{d}x_0\mathrm{d}y_0$。在线弹性范围内可以直接将单个集中载荷产生的变形或应力累加(积分), 即求出不同载荷形式的变形和应力。

4　夹层板的弯曲应力

求出夹层板的变形之后, 还需要继续求解夹层板的应力, 即确定夹层板的应力。

根据层合板理论[18], 夹层板面板的应变可以按式(49)~式(51)计算。

面板 x 向应变 ε_x 为

$$\varepsilon_x=-z\frac{\partial\varphi_x}{\partial x} \tag{49}$$

面板 y 向应变 ε_y 为

$$\varepsilon_y=-z\frac{\partial\varphi_y}{\partial y} \tag{50}$$

面板剪切应变 γ_{xy} 为

$$\gamma_{xy}=-z\left(\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}+\frac{\partial\varphi_x}{\partial y}\right) \tag{51}$$

应力最大的位置应当出现在上、下面板上, 所以更关心这些位置的应力。应用 Hookean 定律, 由应变表达式(49)~式(51)求应力。

面板 x 向应力 σ_x 为

$$\sigma_x=-Ez\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}+\mu\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}\right)\Big/\left(1-\mu^2\right) \tag{52}$$

面板 y 向应力 σ_y 为

$$\sigma_y=-Ez\left(\frac{\partial\varphi_y}{\partial y}+\mu\frac{\partial\varphi_x}{\partial x}\right)\Big/\left(1-\mu^2\right) \tag{53}$$

面板剪切应力 τ_{xy} 为

$$\tau_{xy}=G\left(\frac{\partial\varphi_x}{\partial y}+\frac{\partial\varphi_y}{\partial x}\right) \tag{54}$$

将第 3 节求出的变形代入式(52)~式(54), 则可计算出上、下面板的应力分布。芯层的 x 向应力 σ_x, 可根据上、下面板的 σ_x 插值求得; 芯层的 y 向应力 σ_y 和剪应力 τ_{xy} 一般很小, 可以忽略。

5　算例与讨论

5.1　等效刚度计算验证

计算 2 组规格波纹夹层板的等效刚度。规格 1: t_t=2 mm, t_b=4 mm, t_c=2 mm, h_c=40 mm, l_c=50 mm, E=2.1×10^5 MPa, μ=0.3; 规格 2: t_t=t_b=3 mm, 其余参数与规格 1 相同。为比较本文所提出的等效计算方法的精度, 分别采用文献 [7] 提供的计算方法(以下简称方法 A)和本文的方法(以下简称方法 B)计算上述夹层板的等效刚度。

表 1 和表 2 分别给出了规格 1 和规格 2 夹层板的计算结果及其误差。

表 1 和表 2 表明, 本文提出的刚度计算方法在计算对称波纹夹层板时误差小于−6.98%(该误

差对波纹夹层板弯曲变形和弯曲应力的影响将通过下文计算算例予以说明）。对比表 1和表 2 可以发现，夹层板的非对称性越明显，计算得到的误差也会越大。

表 1 规格 1 夹层板刚度计算结果

Table 1 The evaluation results of type No.1 sandwich panel stiffness

	D_1/N·m	D_2/N·m	D_{12}/N·m	D_k/N·m	C_1/N·m	C_2/N·m
方法A	704 563	570 308	171 092	203 854	2.533×10^8	1.878×10^8
方法B	705 663	570 414	174 758	217 166	2.356×10^8	1.729×10^8
误差/%	0.15	0.01	2.14	6.53	−6.98	−7.95

表 2 规格 2 夹层板刚度计算结果

Table 2 The evaluation results of type No.2 sandwich panel stiffness

	D_1/N·m	D_2/N·m	D_{12}/N·m	D_k/N·m	C_1/N·m	C_2/N·m
方法A	746 738	641 077	192 323	224 377	2.533×10^8	1.732×10^8
方法B	746 744	641 151	192 345	235 792	2.356×10^8	1.729×10^8
误差/%	0.00	0.01	0.01	5.09	−6.98	−0.21

5.2 弯曲变形与应力计算验证

夹层板四边简支，a=2 000 mm, b=1 500 mm, 采用规格 2 夹层板，即 t_t=t_b=3 mm, t_c=2 mm, h_c=40 mm, l_c=50 mm, E=2.1×10^5 MPa, μ=0.3。集中力作用于上面板的中心点，作用点坐标为（1 000, 750），集中力为 p=2×10^4 N。

为验证方法的准确性，将本文方法计算结果与 ANSYS 计算的结果进行对比；为验证刚度计算误差对弯曲变形和弯曲应力的影响，将本文计算方法与文献 [7] 方法进行对比。采用 3 种方法计算。方法 1：不作等效处理，考虑芯层实际形状，采用 ANSYS 有限元方法。上、下面板和芯层板均采用 Shell 181 单元，网格尺寸 12.5 mm×12.5 mm，单元总数为 76 800；方法 2：本文计算方法；方法 3：刚度计算方法采用文献 [7] 的方法，弯曲变形与应力采用本文第 3,4 节的方法（实际上，对于夹层板弯曲的计算方法不能被视为一种新方法，其与方法 2 相同，仅其中的刚度计算方法不同而已，为了便于叙述，也将其称为一种计算方法）。由于集中载荷作用点是变形最大的位置，所以提取通过中心点的两条直线上的变形分布，如图 5 和图 6 所示。拉应力最大值出现在下面板的下表面，压应力最大值出现在上面板的上表面，y=b/4, b/3 和 x=a/4, a/3 位置处对应的最大应力分布如图 7~图 14 所示。由于通过集中载荷作用点，作用点及附近应力为无穷大，因此没有关注 $y=b/2$ 和 $x=a/2$ 位置的应力分布。

如图 5~图 6 所示，3 种计算方法计算的位移分布几乎相同，与方法 1 对比，方法 2 最大误差为−2.01%，以方法 3 为基准，方法 2 最大误差为−1.27%。这说明本文关于夹层板弯曲的计算方法具有较好的准确性。

由图 7~图 14 可以看到，方法 2 和方法 3 计算的应力非常接近，如果以文献 [7] 的计算值为基

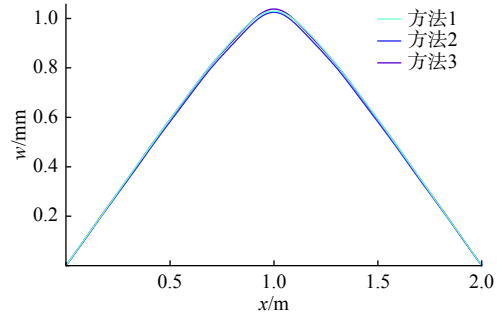

图 5 y=b/2 位置处的位移

Fig. 5 Deflection of y=b/2

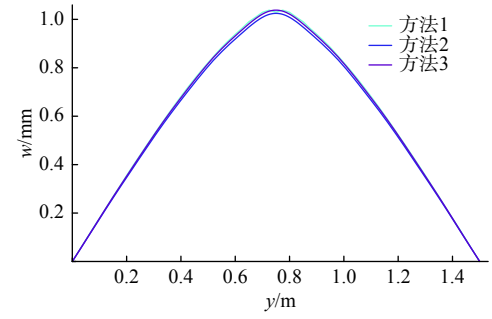

图 6 x=a/2 位置处的位移

Fig. 6 Deflection of x=a/2

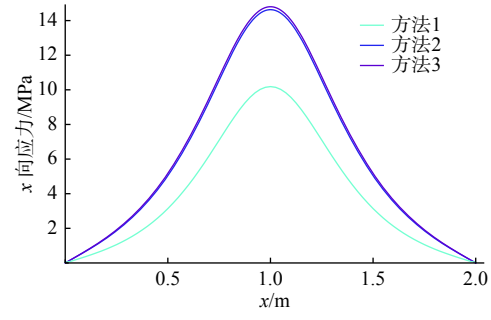

图 7 y=b/4 位置处下面板的下表面 x 向应力

Fig. 7 Bottom facesheet lower surface x direction stress at y= b/4

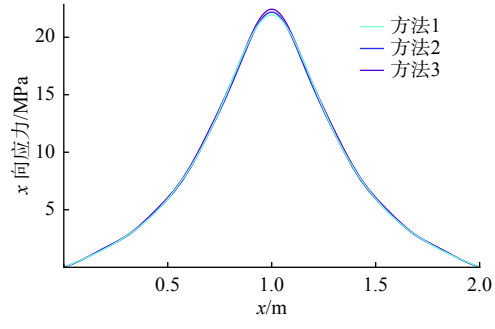

图 8 y=b/3 位置处下面板的下表面 x 向应力

Fig. 8 Bottom facesheet lower surface x direction stress at y= b/3

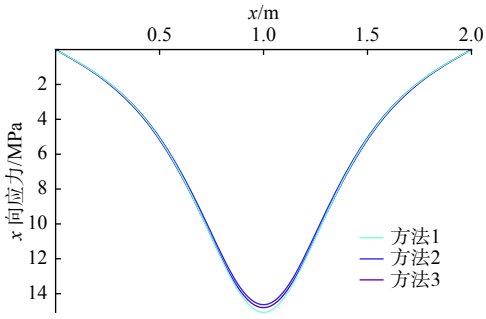

图 9　$y=b/4$ 位置处上面板上表面 x 向应力

Fig. 9　Top facesheet upper surface x direction stress at $y=b/4$

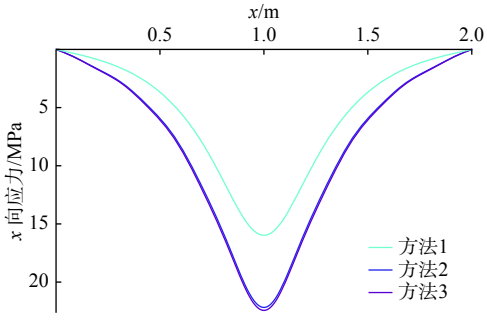

图 10　$y=b/3$ 位置处上面板上表面 x 向应力

Fig. 10　Top facesheet upper surface x direction stress at $y=b/3$

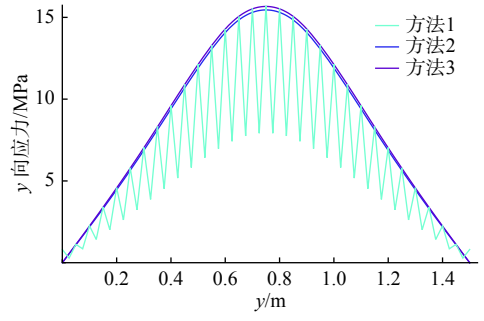

图 11　$x=a/4$ 位置处下面板下表面 y 向应力

Fig. 11　Bottom facesheet lower surface y direction stress at $x=a/4$

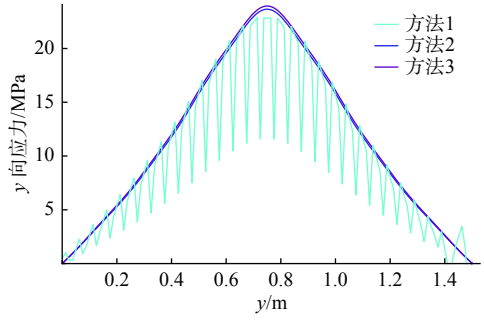

图 12　$x=a/3$ 位置处下面板下表面 y 向应力

Fig. 12　Bottom facesheet lower surface y direction stress at $x=a/3$

准，上述图示中应力的最大误差为−1.36%。结合表 2 的刚度计算结果可知，刚度最大误差接近−7%，仅导致应力最大误差为−1.36%，这说明本文关于计算刚度的方法可以用于夹层板的弯曲计算，不会因为刚度计算误差导致变形和应力计算误差的放大。

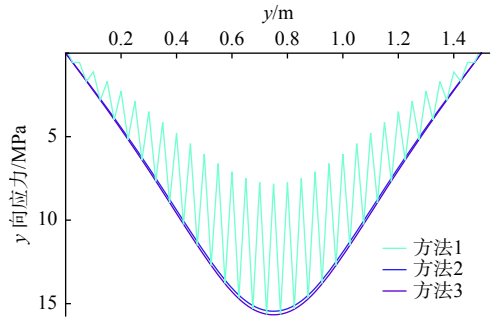

图 13　$x=a/4$ 位置处上面板上表面 y 向应力

Fig. 13　Top facesheet upper surface y direction stress at $x=a/4$

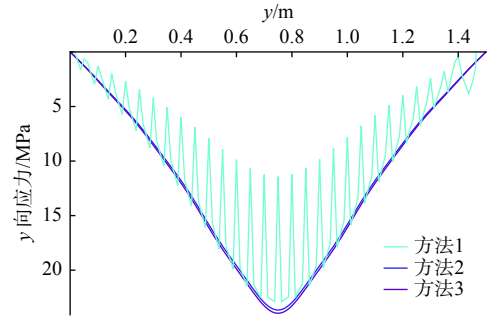

图 14　$x=a/3$ 位置处上面板上表面 y 向应力

Fig. 14　Top facesheet upper surface y direction stress at $x=a/3$

方法 1 是目前业内公认的计算比较精确的方法。关于 x 向应力，如图 8 和图 9 所示，3 种方法的计算结果极其接近；图 7 和图 10 则不同，方法 1 与其余 2 种方法的差别较大，且方法 2 和方法 3 的结果普遍大于方法 1 的计算结果（计算值的绝对值）。这是因为波纹夹层板面板应力沿着波纹方向（y 方向）分布是波纹振荡的，在芯层与面板结合的位置（上面板 $y=k\,l_c$，下面板 $y=(k+1/2)\,l_c$，k 为正整数），局部刚度最大，应力达到局部极小值；在结合点中心的位置（上面板为 $y=(k+1/2)\,l_c$，下面板为 $y=k\,l_c$，k 为正整数），局部刚度最小，应力达到局部极大值。这种规律从图 11~图 14 中可以看出，虽然图中列出的是 y 向应力，但 x 向应力波动规律与之类似。不仅如此，图 11~图 14 还显示了一个规律，即方法 2 和方法 3 的计算值是方法 1 波动峰值的光滑连线。由于 $y=b/4=7.5\,l_c$ 正是芯层与下面板的结合点，$y=b/3=10\,l_c$ 正是芯层与上面板的结合点，应力处于波动的波谷点，所以方法 1 的计算值普遍偏小。方法 2 和方法 3 无法捕捉这种波动规律，根本原因是其采用了均匀化处理，将非连续的芯层等效成连续介质。不过，这并不影响方法 2 和方法 3 的工程应用，因为方法 2 和方法 3 是方法 1 峰值的连线，即方法 2 和方法 3 在工程计算上偏于安全。忽略方法 1 中应力的这种波动分布，仅用峰值光滑连线与方法 2 比较，方法 2（本文方法）的应力最大误差

是 3.63%。

图 5~图 14 仅展示了少数几个特殊位置的变形及应力分布，通过对其他位置的试算对比，计算结果都吻合得比较好，误差也没有明显偏离上述结论(应力对比剔除载荷作用点位置)。

本文采用了双傅里叶级数解法，必然涉及到级数收敛的检验。本文关于变形和应力都是累加到 $m=n=15$。关于变形的收敛性，跟单层板类似，收敛较快，累加到 $m=n=5$ 就收敛。而应力收敛较慢，因此，为了证明本文的结果是收敛的计算值，图 15 列出了下面板下表面点($a/2$, $b/3$)位置的 x 向应力与累加次数($m=n$)的函数图。从图中可以看出，当 $m=n\geqslant 15$ 时，级数和项数再增加，应力差别不超过 0.5 MPa。对于方法 1 的收敛性，也通过有限元网格由疏到密做过检验，上述图示中的结果都是处于收敛状态的解。

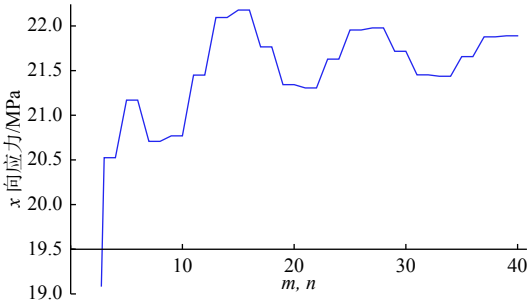

图 15 应力收敛性检验

Fig. 15 Stress convergence survey

6 结 论

本文通过将波纹夹层板的中间芯层等效成正交异性体，应用卡氏定理求解了各项等效弹性模量，再采用层合板理论计算了夹层板的整体刚度。这种先等效再累加计算整体等效刚度的方法可以避免完全直接采用文献 [7] 所述方法计算剪切刚度时的复杂繁琐计算，而且在计算夹层板的弯曲时误差很小。

通过算例验证，本文关于等效刚度的计算方法与文献 [7] 的计算方法相比，当计算对象为对称波纹夹层板时，计算误差最小，为−6.98%；当计算对象为非对称波纹夹层板时，误差有所增加。

刚度计算误差并不会导致夹层板位移和应力计算误差的放大，采用双傅里叶级数求解波纹夹层板弯曲问题时，计算误差明显缩小。−6.98% 的刚度误差仅产生位移误差−1.27% 和−1.36% 的应力误差。

本文所提波纹夹层板变形的计算方法与有限元法相比，误差为−2.01%；有限元法计算结果显示，夹层板上、下面板应力沿波纹方向的分布表现出了波动性，在面板与芯层结合点的位置，局部刚度达到极大值，应力达到局部极小值；在结合点中心位置，局部刚度达到极小值，应力达到局部极大值。本文方法采用了均匀化处理，应力分布没有波动表现，计算结果接近于有限元法波动峰值的光滑连线，与其光滑连线相比，最大误差为 3.63%。

参考文献：

[1] KUJALA P, ROMANOFF J, TABRI K, et al. All steel sandwich panels – design challenges for practical applications on ships[C]//Proceedings of the 9th Symposium on Practical Design of Ships and Other Floating Structures. Deutschland: Lübeck-Travemünde, 2004: 1–8.

[2] KUJALA P, KLANAC A. Steel sandwich panels in marine applications[J]. Brodogradnja, 2005, 56(4): 305–314.

[3] YU Y, HOU W B, HU P, et al. Elastic constants for adhesively bonded corrugated core sandwich panels[J]. Composite Structures, 2017, 176: 449–459.

[4] 丁德勇, 王虎, 凌昊, 等. I 型金属夹层结构连接构件强度特性研究及灵敏度分析 [J]. 中国舰船研究, 2014, 9(2): 22–29.
DING D Y, WANG H, LING H, et al. Strength property and sensitivity of I-Core steel sandwich panel joints[J]. Chinese Journal of Ship Research, 2014, 9(2): 22–29 (in Chinese).

[5] CHANG W S, VENTSEL E, KRAUTHAMMER T, et al. Bending behavior of corrugated-core sandwich plates[J]. Composite Structures, 2005, 70(1): 81–89.

[6] HE L, CHENG Y S, LIU J. Precise bending stress analysis of corrugated-core, honeycomb-core and X-core sandwich panels[J]. Composite Structures, 2012, 94(5): 1656–1668.

[7] LIBOVE C, HUBKA R E. Elastic constants for corrugated core sandwich plates[J]. Journal of Structural Engineering, 1951, 122(8): 958–966.

[8] FUNG T C, TAN K H, LOK T S. Elastic constants for Z-core sandwich panels[J]. Journal of Structural Engineering, 1994, 120(10): 3046–3055.

[9] FUNG T C, TAN K H. Shear stiffness for Z-core sandwich panels[J]. Journal of Structural Engineering, 1998, 124(7): 809–816.

[10] FUNG T C, TAN K H, LOK T S. Shear stiffness D_{Qy} for C-core sandwich panels[J]. Journal of Structural Engineering, 1996, 122(8): 958–966.

[11] ATASHIPOUR S R, AL-EMRANI M. A realistic model for transverse shear stiffness prediction of composite corrugated-core sandwich elements[J]. International Journal of Solids and Structures, 2017, 129: 1–17.

(下转第 107 页)